АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том V

4

1960

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместители гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Л. А. ЖЕКУЛИН, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, А. Ф. ИОФФЕ, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь редакции Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том V АПРЕЛЬ, 1960 Вып. 4

СОДЕРЖАНИЕ

ифоров В. И. Ленин и радиоэлектроника I
рагович В. Г. О расчете характеристик обнаружения при квадратичном суммировании сигналов 531
евин Б. Р. Оптимальные фазовые методы обнаружения сигналов 537
расовский А. А., Зуйков В. Н. Предельный порог чувствительности приема теплового радиоизлучения 544
ерняк Ю. Б. Взаимная корреляция напряжений шумов на выходе усилителей с перекрывающимися частотными характеристиками 551
учина А. А. Качественный анализ нелинейного дифференциального уравнения второго порядка жесткой автоколебательной системы 562
устерович А. Н. К вопросу о приближенном решении уравнения фазы колебаний лампового автогенератора, находящегося под действием внешней эдс 568
арпеев Г. А., Семенов А. А. Об одном методе экспериментального исследования флуктуаций УКВ 578
рауде Б. В., Есепкина Н. А., Кайдановский Н. Л., Хайкин С. Э. Исследование влияния случайных ошибок на электрические характеристики остронаправленных зеркальных антенн с отражателем переменного профиля . . . 584
иказан П. С. Дифракция электромагнитных волн на стыке спирального и сплошного круглого волноводов 597
естопалов В. П. Дисперсионные свойства и пространственный резонанс в спиральном волноводе, помещенном в магнитодиэлектрическую среду 605
акман Д. Е. Искажения сигналов в линиях задержки 621
ович Л. Р. Некоторые соотношения для каскадного соединения n одинаковых необратимых четырехполюсников 633
уревич С.Б., Быков Р. Е. Влияние апертуры пучка на коммутацию потенциального рельефа в видиконе 638
апопорт Г. Н. Возбуждение волновода электронным пучком с периодически-изменяющимися траекториями 649
ижняк Н. А. Потери энергии заряженным диском, равномерно движущимся в волноводе 654
ейхрудель Э. М., Смирницкая Г. В., Васильева М. Н. Некоторые характеристики разряда в ионном насосе и магнитном ионизационном манометре 662
азин А. А., Тарасова Л. В., Цукерман В. А. Микрокиносъемка поверхностей электродов в предпробойной фазе и при электрическом пробое в высоком вакууме 666
ушнир Ю. М., Кабанов А. Н., Крутякова Л. Н. Измерение потерь энергии 70 *кэв* ионов лития в газах электростатическим анализатором 672

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

асов Н. Г., Карлов Н. В. О широкополосном радиометре с квантовым преобразователем спектра 676
ычинский В. П., Федоров В. Г., Савилов П. И. Регенеративный усилитель-преобразователь на диодах с нелинейной емкостью 677
ычинский В. П., Карпецкий В. В. Исследование одноконтурного параметрического усилителя 679

Базаров Е. Н. Делитель частоты на трехсеточном отражательном клистроне 681
Крылов Г. Н., Макаров Г. И. Функции ослабления электромагнитного поля вертикального диполя и вертикальной антенны 684
Силин Р. А. О дисперсионных свойствах двумерно- и трехмерно-периодических систем (искусственные диэлектрики) 688
Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р. К учету емкостных эффектов при расчете ступенчатых переходов 691
Чиркин Н. М., Стадник Ю. Г. О некоторых свойствах коаксиального волновода, оба проводника которого нагружены дисками 694
Шевчик В. Н., Шведов Г. Н. О влиянии внешних цепей на работу электронно-волнового генератора 698
Цейтлин М. Б., Ильина Е. М. К вопросу об анализе взаимодействия электронного потока с бегущей волной 700

Адрес редакции: Москва, К—9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроник АН СССР, редакция журнала «Радиотехника и электроника»

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-03655 Подписано к печати 26/III 1960 г. Тираж 5375 экз. Зак. 7
Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$ Бум. л. 5,62 Печ. л. 15,0+2 вкл. Уч.-изд. л. 16

2-я типография Издательства АН СССР. Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

Digitized by the Internet Archive
in 2023

https://archive.org/details/radiotehnika-i-elektronika_1960-04_5_4

Рис. художника Н. Жукова

В. И. ЛЕНИН

90 лет со дня рождения

ЛЕНИН И РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

(*К 90-летию со дня рождения В. И. Ленина*)

Развитие радиоэлектроники в нашей стране неразрывно связано с именем Владимира Ильича Ленина.

Изобретенное А. С. Поповым в 1895 году радио в условиях дореволюционной России развивалось крайне медленно. К моменту Великой Октябрьской социалистической революции 1917 года Россия — родина радио — очень отстала от других стран в области развития и внедрения радиосвязи.

Гений В. И. Ленина сразу оценил огромное значение радио для нашей страны. С первых дней Советской власти Владимир Ильич Ленин применяет радио для организации масс. С ноября 1917 года при помощи радиотелеграфа передавались декреты Советского правительства, сообщения о внутреннем и международном положении Советской республики, радиограммы В. И. Ленина, обращенные к народу и местным органам Советской власти. Эти радиопередачи сыграли большую роль в деле организации народных масс.

В. И. Ленин придавал большое значение и уделял огромное внимание развитию радиотехнических средств молодой Советской республики и организации общегосударственной сети радиостанций.

19 июля 1918 года за подписью В. И. Ленина был издан декрет правительства «О централизации радиотехнического дела». Этим декретом было положено начало организации отечественной радиопромышленности, не зависимой от иностранных радиотехнических фирм.

В. И. Ленин неоднократно подчеркивал огромное значение радио — этой важнейшей отрасли народного хозяйства и могучего средства коммунистического воспитания народных масс —, уделял огромное внимание радиостроительству, призывая не жалеть средств на развитие радиотехники, радиосвязи и радиовещания.

Любые начинания молодых советских радиоспециалистов, их смелые технические замыслы всегда находили у Владимира Ильича Ленина горячую поддержку.

2 декабря 1918 года В. И. Ленин подписал исторический декрет Советского правительства об организации знаменитой Нижегородской радиолаборатории, руководимой одним из основоположников советской радиотехники М. А. Бонч-Бруевичем. Этой лаборатории впоследствии было присвоено имя Ленина. Она стала одним из мировых центров научных исследований и открытий в области радио.

В. И. Ленин, несмотря на титаническую работу по руководству партией и страной, находил время для непосредственного личного руководства важнейшими работами по радиотехнике.

В письме от 5 февраля 1920 года научному руководителю Нижегородской радиолаборатории М. А. Бонч-Бруевичу В. И. Ленин писал: «Пользуюсь случаем, чтобы выразить Вам глубокую благодарность и сочувствие по поводу большой работы радиоизобретений, которую Вы делаете. Газета без бумаги и «без расстояний», которую Вы создаете, будет великим делом».

Горячая поддержка В. И. Ленина воодушевила коллектив радиоспециалистов Нижегородской радиолаборатории на новые успехи. 17 сентября 1922 года через Центральную радиотелефонную станцию мощностью в 12 киловатт на волне 3200 метров был передан первый «радиоконцерт», чем было положено начало советскому радиовещанию. Большие успехи были достигнуты Нижегородской радиолабораторией по разработке электронных усилительных и генераторных ламп, освоению коротких волн и другим важным областям радиотехники и электроники того времени.

28 июня 1924 года Совет Народных Комиссаров вынес постановление «О частных приемных радиостанциях». В этом постановлении предусматривалось широкое развитие радиовещания и радиолюбительского движения в нашей стране.

Неустанная забота Коммунистической партии и Советского правительства о развитии радиоэлектроники и ее внедрении

во все важнейшие области народного хозяйства, науки, техники, культуры и быта людей обеспечила высокие темпы ее развития. «Митинг с многомиллионной аудиторией», о котором мечтал В. И. Ленин, стал реальностью. Советская радиоэлектроника достигла больших успехов в самых разнообразных ее областях.

Выполняя исторические решения XXI съезда Коммунистической партии Советского Союза, советские радиоспециалисты успешно решают разнообразные сложные проблемы и задачи современной радиоэлектроники.

Не подлежит сомнению, что огромный коллектив советских специалистов по радиоэлектронике обогатит мировую радиоэлектронную науку новыми замечательными открытиями и достижениями. Самое широкое применение этих достижений радиоэлектронной науки и техники на благо народа явится лучшим памятником советских радистов создателю Коммунистической партии и основателю первого в мире социалистического государства, бессмертному Ленину.

В памяти советских людей всегда будут живы воспоминания о том, что сделал Владимир Ильич Ленин для развития радиоэлектронной науки и радиостроительства в нашей стране. Пройдут века, но первые шаги советского радио, неразрывно связанные с именем великого Ленина, никогда не будут забыты человечеством.

В. И. Сифоров

1960 № 4

О РАСЧЕТЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ СУММИРОВАНИИ СИГНАЛОВ

В. Г. Сарагович

Предлагается методика вычисления функции распределения напряжения на выходе схемы квадратичной обработки сигналов, флуктуирующих по нормальному закону.

Среди различных способов выделения полезного сигнала из шумов особо важное значение имеет квадратичное суммирование, т. е. сложение квадратов наблюдаемых амплитуд. Причины этого состоят в том, что, с одной стороны, этот способ обработки является оптимальным для некоторых видов сигналов, с другой стороны, многие сложные схемы обработки удовлетворительно им аппроксимируются. Неудивителен поэтому постоянный интерес практиков к указанной схеме и появление большого количества работ, в которых вычисляются вероятностные характеристики квадратичной обработки сигналов, в частности соответствующие пороговые сигналы. Общим для всех теоретических исследований является предположение нормальности совместного распределения вероятностей составляющих (проекций) напряжений, поступающих на вход схемы обработки. Это распределение полностью задается своей матрицей вторых моментов.

В статье предлагается метод вычисления функции распределения напряжений, получающихся на выходе схемы квадратичного суммирования, основанный на использовании свойств собственных значений матрицы вторых моментов входных напряжений. Предполагается, что входные напряжения не содержат постоянной компоненты, т. е. их средние значения равны нулю.

1. Рассмотрим последовательность двумерных векторов $\vec{\Sigma}_k = (x_k,\ y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, изображающих соответствующие входные напряжения, причем каждый из них является суммой $\vec{s}_k + \vec{\Delta}_k$ сигнального и помехового векторов. Совместная плотность вероятностей $2n$ составляющих x_k, y_k нормальна и имеет следующий вид:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det \mathfrak{M}}}\, e^{-\frac{1}{2}\vec{x}\mathfrak{M}^{-1}\vec{x}}, \qquad (1)$$

где $\mathfrak{M} = \| m_{ij} \|$ — матрица вторых моментов величин * x_k, y_k, а нумерация аргументов плотности (1) такова: проекциям x_k сопоставлены аргументы с нечетными номерами x_{2k-1} $(k = 1, \ldots, n)$, а проекциям y_k —

---

* Распределение вероятностей предполагается невырожденным и поэтому матрица $\mathfrak{M}$ должна быть положительно определенной. Выражение $\vec{x}\mathfrak{M}^{-1}\vec{x}$ означает квадратичную форму $\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} \mu_{ij} x_i x_j$, где μ_{ij} — элементы матрицы $\mathfrak{M}^{-1}$.

аргументы с четными номерами x_{2k} ($k = 1, \ldots, n$). Таким образом, эле менты матрицы $\mathfrak{M}$ равны

$$m_{2k-1,\,2l-1} = \overline{x_k x_l}, \quad m_{2k,\,2l} = \overline{y_k y_l},$$

$$m_{2k-1,\,2l} = \overline{x_k y_l}, \quad m_{2k,\,2l-1} = \overline{y_k x_l}.$$

Конкретный вид матрицы $\mathfrak{M}$ зависит от природы входного напряже ния: структуры полезного сигнала и корреляционных связей сопровож дающей его помехи.

При квадратичном суммировании суждение о наличии или отсутст вии сигнала выносится следующим образом: составляется величина

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2),$$

и если она превосходит фиксированное значение ζ_0, то считается, чт последовательность $\vec{\Sigma}_k$ содержит сигнальные векторы, в противном слу чае за источник входных напряжений принимаются помехи. Выбо ζ_0 — порогового уровня — производится так, чтобы в отсутствие сигнал вероятность неравенства $\zeta > \zeta_0$ равнялась заданной величине F, именуе мой вероятностью ложной тревоги. Вероятность того же неравенства присутствии сигнала D зависит от отношения сигнал/помеха и назы вается вероятностью обнаружения. Для вычисления этих вероятносте необходимо знать распределение величины ζ в предположении, что x_k y_k имеют совместную плотность (1).

Известно, что характеристическая функция $f(t_1, t_2, \ldots, t_{2n})$ соответствующая плотности $p(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, определяется равен ством

$$f(t_1, \ldots, t_{2n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{i \vec{t}\,\vec{x}} p(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{3}$$

где $\vec{t}\,\vec{x} = t_1 x_1 + \ldots + t_{2n} x_{2n}$; $d\vec{x} = dx_1 \ldots dx_{2n}$, поэтому характе ристическая функция величин x_k^2, y_k^2 равна

$$f_2(t_1, t_2, \ldots t_{2n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{i \vec{t}\,\vec{x}^2} p(\vec{x})\, d\vec{x} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det \mathfrak{M}}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{i \sum_1^{2n} t_k x_k^2 - \frac{1}{2} \sum \mu_{jk} x_j x_k} dx_1 \ldots dx_{2n} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det \mathfrak{M}}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{-\frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \tau_{jk} x_j x_k} dx_1 \ldots dx_{2n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det \mathfrak{M} \det T_{t_1, t_2, \ldots, t_{2n}}}},$$

где введены следующие обозначения: μ_{jk} — элементы матрицы $\mathfrak{M}^{-1}$ $\tau_{jk} = \mu_{jk} - 2it_k \delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Кронекера); $T_{t_1, t_2, \ldots, t_{2n}} = \| \tau_{jk} \|$. Величин

ζ является суммой случайных величин с совместной характеристической функцией $f_2(t_1, \ldots, t_{2n})$, поэтому ее характеристическая функция $f_\zeta(t)$, согласно правилу теории вероятностей, выражается следующим образом:

$$f_\zeta(t) = f_2(t, t, \ldots, t)$$

или

$$f_\zeta(t) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathfrak{M} \det T_t}}, \tag{4}$$

где матрица $T_t = T_{t,t,\ldots,t}$, ее элементы равны $\mu_{jk} - 2it\delta_{jk}$. Очевидно, что $\det T_t$ представляет собой характеристический многочлен матрицы $\mathfrak{M}^{-1} = T_0$. Разложим его на множители

$$\det T_t = \prod_1^{2n} (\lambda_k^{-1} - 2it),$$

где λ_k — собственные значения $\mathfrak{M}$; так как $\det \mathfrak{M} = \prod_1^{2n} \lambda_k$, получаем выражение функции $f_\zeta(t)$ в виде

$$f_\zeta(t) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^{2n} (1 - 2\lambda_k it)}}.$$

Отсюда при помощи преобразования Фурье находим плотность вероятностей величины ζ:

$$p_\zeta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{\sqrt{\prod_1^{2n} (1 - 2\lambda_k it)}}\, dt, \tag{5}$$

которая, вообще говоря, не представляется в элементарных функциях. Однако матрицы вторых моментов, фигурирующие в задачах теории обнаружения сигналов, таковы, что их собственные значения четно-кратны. Откладывая пояснение этого факта (см. п. 2, пример г), используем его для упрощения формулы (5).

Характеристическая функция $f_\zeta(t)$ принимает вид

$$f_\zeta(t) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (1 - 2\lambda_k it)};$$

разлагая эту рациональную функцию на простейшие дроби и подставляя сумму в интеграл, изображающий плотность, находим

$$p_\zeta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{\prod_{k=1}^{n} (1 - 2\lambda_k it)}\, dt = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{n_k} \frac{C_{kl}}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(1 - 2\lambda_k it)^l}\, dt = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{n_k} C_{kl}\, \frac{x^{l-1} e^{-\frac{x}{2\lambda_k}}}{2^l \Gamma(l)\, \lambda_k^l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{n_k} C_{kl} k_{2l} \left(\frac{x}{\lambda_k}\right), \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu = n,$$

где C_{kl} — коэффициенты разложения дроби $f_\zeta(t)$; $k_{2l}(z)$ — плотнос вероятностей χ^2-распределения с $2l$ степенями свободы; ν — число ра личных собственных значений; числа n_k указывают кратности собстве ных значений.

Таким образом, искомое распределение величины ζ представля собой линейную комбинацию χ^2-распределений с четным числом степен свободы и с параметрами, являющимися собственными значениями ма рицы вторых моментов входных напряжений.

Итак,

$$p_\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{n_k} C_{kl} k_{2l}\left(\frac{x}{\lambda_k}\right). \qquad (1)$$

2. Приведем примеры встречающихся матриц вторых моментов $\mathfrak{M}$ соответствующие плотности $p_\zeta(x)$.

а) Независимо флуктуирующие входные напряжения с прямоугол ной огибающей описываются матрицей $\mathfrak{M}$, равной

$$\mathfrak{M} = \varkappa E,$$

где $\varkappa$ — дисперсия каждой из составляющих; E — единичная матриц Все $2n$ собственных значений совпадают: $\lambda_k = \varkappa\,(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, плотность $p_\zeta(x)$ есть плотность χ^2-распределения с $2n$ степенями св боды:

$$p_\zeta(x) = \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x}{2\varkappa}}}{2^n (n-1)!\, \varkappa^n}.$$

б) Согласованно флуктуирующий во всех последовательных напр жениях сигнал с прямоугольной огибающей и независимые помехи, случае когда отсутствует зависимость между разноименными составля щими x_k, y_l напряжений, характеризуются матрицей вторых момент которая распадается на одинаковые квадратные блоки $\varkappa K$,

$$K = \begin{Vmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 & \ldots & \rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho & \rho & \rho & \rho & \ldots & 1 \end{Vmatrix},$$

буквой ρ обозначен один и тот же для любой пары проекций коэфф циент корреляции.

Перенумеровав строки и столбцы в матрице $\mathfrak{M}$ так, чтобы первые из них относились к x-проекциям напряжений, а остальные n столбц и строк — к y-проекциям, запишем матрицу $\mathfrak{M}$ в виде

$$\mathfrak{M} = \varkappa \begin{Vmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{Vmatrix},$$

где 0 означает квадратную матрицу, состоящую из нулей. Элементар ным подсчетом легко показать, что матрица K имеет два собственны

значения, первое $\lambda_1 = \varkappa(1 + (n-1)\rho)$ однократно *, второе $\lambda_2 = \varkappa(1-\rho)$ — вырожденное $n-1$-кратное. Поэтому плотность $p_\zeta(x)$, найденная впервые Б. С. Флейшманом, представляет собой линейную комбинацию плотностей χ^2-распределения, одна из которых имеет две степени свободы и параметр λ_1, а остальные — степени свободы от $2l$ до 2 с одним и тем же параметром λ_2, т. е.

$$p_\zeta(x) = \sum_{l=1}^{n-1} A_l k_{2l}\left(\frac{x}{\lambda_2}\right) + B k_2\left(\frac{x}{\lambda_1}\right),$$

где коэффициенты $A_1, \ldots, A_l, B$ определяются из разложения рациональной дроби

$$\frac{1}{(1-\lambda_2 x)^{n-1}(1-\lambda_1 x)} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{A_l}{(1-\lambda_2 x)^l} + \frac{B}{1-\lambda_1 x}.$$

Нетрудно рассмотреть более общий случай согласованно флуктуирующего сигнала с огибающей произвольной формы.

в) Усложнением предыдущего примера является следующий. Пусть снова x- и y-проекции независимы, а корреляционные матрицы каждой из групп $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ имеют одинаковый вид

$$K = \begin{Vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \ldots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \ldots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \ldots & \rho_{n-3} \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & 1 & \ldots & \rho_{n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \rho_{n-4} & \ldots & 1 \end{Vmatrix},$$

где ρ_k — коэффициенты корреляции стационарной последовательности представляются интегралами

$$\rho_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} d\sigma(x),$$

$\sigma(x)$ — неубывающая функция. Матрица вторых моментов снова имеет вид

$$\mathfrak{M} = \varkappa \begin{Vmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{Vmatrix},$$

имеющий, вообще говоря, n различных собственных значений.

г) Общий вид матрицы вторых моментов $\mathfrak{M}$, встречающейся в задачах обнаружения, описывается следующими соотношениями между ее элементами, перенумерованными согласно формуле (2):

$$m_{ij} = m_{ji}, \qquad m_{2k-1,\,2l-1} = m_{2k,\,2l},$$

$$m_{2k-1,\,2l} = -m_{2l-1,\,2k}.$$

* Ясно, что матрица K положительно определена лишь тогда, если $\rho > -1/(n-1)$, в задачах обнаружения это условие выполнено.

Матрица $\mathfrak{M}$ является линейным преобразованием в $2n$-мерном пр
странстве R с векторами $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$. Легко видеть, ч
это преобразование действует над векторами из R так же, как и эрм
това матрица $A = \| a_{kl} \|$ с элементами $a_{kl} = m_{2k-1,\,2l-1} + im_{2k,\,2l-1}$ дейс
вует в n-мерном комплексном пространстве $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots$
$x_n + iy_n)$. Отсюда вытекает, что каждому из n собственных значений
соответствует пара одинаковых собственных значений матрицы $\mathfrak{M}$. П
этому собственные значения матрицы $\mathfrak{M}$ четно-кратны. Вследств
положительной определенности матрицы $\mathfrak{M}$ все они положительны.

Таким образом, методика, развитая в п. 1, применима к рассма
риваемому случаю и плотность $p_\zeta(x)$ представляется формулой (6).

Поступила в редакцию
10 VII 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 4

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФАЗОВЫЕ МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Б. Р. Левин

Найдены оптимальные процедуры обработки выборки фазы принятого сигнала для обнаружения полезного сигнала, скрытого в шумах. Рассмотрены случаи обнаружения детерминированного и флуктуирующего сигналов. Даны выражения для вероятностей ложных тревог и правильного обнаружения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время задачу обнаружения сигнала, скрытого в шумах, общепринято формулировать на языке теории проверки статистических гипотез как задачу о выборе между двумя альтернативными гипотезами: наблюдаемая на входе приемного устройства выборка $(x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n)$ принадлежит шуму или она принадлежит сумме полезного сигнала и шума. Оператор должен иметь заранее установленное правило (процедуру решения), согласно которому он мог бы на основании сделанных им наблюдений решить принять одну из гипотез и отвергнуть другую. Как известно [1], различные критерии качества обнаружения приводят к единообразной оптимальной процедуре решения: по наблюдаемой выборке $(x_1;\ x_2;..;\ x_n)$ вычисляется отношение правдоподобия

$$l(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) = \frac{w_n(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n \mid s)}{w_n(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n \mid 0)}$$

и принимается решение о наличии сигнала, если полученная величина превосходит некоторый фиксированный уровень, установленный в соответствии с принятым критерием. Параметр s в функции распределения выборки равен нулю, когда выборка принадлежит шуму, и положителен, когда она принадлежит сумме сигнала и шума.

Если сигнал на входе приемного устройства — высокочастотное колебание, представляющее либо сумму полезного сигнала и узкополосного стационарного нормального шума, либо только шум, то для обнаружения сигнала вместо выборки, состоящей из n мгновенных значений принятого сигнала, можно использовать выборку того же объема, состоящую из $n/2$ значений огибающей и $n/2$ значений фазы $(r_1;\ \theta_1;\ r_2;\ \theta_2;\ldots;\ r_{n/2};\ \theta_{n/2})$. Соответственно наряду с оптимальной процедурой обработки выборки принятого сигнала (абсолютно оптимальной) может рассматриваться оптимальная процедура обработки выборки огибающей $(r_1;\ r_2;\ldots;\ r_{n/2})$ — амплитудный метод обнаружения, или выборки фазы $(\theta_1;\ \theta_2;\ldots;\ \theta_{n/2})$—фазовый метод обнаружения. Ясно, что оптимальный амплитудный или оптимальный фазовый метод обнаружения не может быть лучше абсолютно оптимальной процедуры, так как процессы выделения огибающей и фазы неизбежно связаны с потерей части информации о сигнале. Оптимальные процедуры обработки принятого сигнала, а также оптимальные амплитудные методы обнаружения исследованы достаточно полно, им пос-

вящена обширная литература. В то же время оптимальные фазовые методы обнаружения остались до сих пор неисследованными и не было проведено их сравнение с указанными выше методами*.

В данной статье рассматриваются оптимальные фазовые методы обнаружения сигналов двух видов: полностью детерминированного и флуктуирующего (нормальный случайный процесс), которые представляют в некотором отношении два предельных случая. Как показано В. А. Котельниковым [3], при заданной вероятности ложных тревог, детерминированный сигнал обеспечивает максимальную возможную вероятность правильного обнаружения при заданной энергии сигнала E, а для флуктуирующего сигнала, имеющего характер белого шума, величина вероятности правильного обнаружения минимальна при условии, что энергия сигнала не меньше E.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА

Предполагая независимость элементов выборки и используя (см., например, [4]) известное распределение фазы случайного процесса, представляющего сумму узкополосного стационарного нормального шума с нулевым средним, дисперсией σ^2 и равномерным в полосе Δf энергетическим спектром детерминированного сигнала $a(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$, где $a(t)$ и $\varphi(t)$ — заданные функции времени, запишем отношение правдоподобия при фазовом методе обнаружения в виде

$$l(\theta_1;\ \ldots;\ \theta_{n/2}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n/2} \left\{ e^{-\alpha_i^2/2\sigma^2} + \sqrt{2\pi}\,\frac{\alpha_i}{\sigma}\cos(\theta_i - \varphi_i) F\left[\frac{\alpha_i}{\sigma}\cos(\theta_i - \varphi_i)\right] e^{\frac{\alpha_i^2 \sin^2(\theta_i - \varphi_i)}{2\sigma^2}} \right\}$$

$$|\theta_i - \varphi_i| \leqslant \pi, \qquad (1)$$

где

$$\alpha_i = \alpha(t_i),\ \varphi_i = \varphi(t_i),$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx.$$

Правило решения может быть сформулировано следующим образом: сигнал присутствует, если

$$\ln l(\theta_1;\ \ldots;\ \theta_{n/2}) = \sum_{i=1}^{n/2} \ln\left\{ e^{-\alpha_i^2/2\sigma^2} + \sqrt{2\pi}\,\frac{\alpha_i}{\sigma}\cos(\theta_i - \varphi_i) \times \right.$$

$$\left. \times\ F\left[\frac{\alpha_i}{\sigma}\cos(\theta_i - \varphi_i)\right] e^{\frac{\alpha_i^2 \sin^2(\theta_i - \varphi_i)}{2\sigma^2}} \right\} \geqslant C, \qquad (2)$$

где порог C выбирается в соответствии с принятым критерием (для идеального наблюдателя, например $C = 0$).

Для слабого сигнала ($\alpha/\sigma \ll 1$) правило решения значительно упрощается. Используя разложение в ряд Фурье функции распределения

---

* Только в [2] было проведено сравнение амплитудного и фазового методов, но не с общих позиций статистических решений.

азы, приведенное в [4], получим из (2) в первом приближении

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n/2}\frac{\alpha_i}{\sigma}\cos(\theta_i-\varphi_i)\geqslant C+\frac{\pi}{8\sigma^2}\sum_{i=1}^{n/2}\alpha_i^2$$

ли

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n/2}\alpha_i\cos(\theta_i-\varphi_i)\geqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}C+\sqrt{\frac{\pi}{8}}E/N_0, \tag{3}$$

де E — энергия сигнала, принимаемая за время $T=t_{n/2}-t_1$, N_0 — средняя мощность шума на единицу полосы.

Как известно [1], сумму в формуле (3) можно представить интегралом и переписать аналитическое выражение правила решения в виде

$$\Delta f\int_0^T\alpha(t)\cos[\theta(t)-\varphi(t)]\,dt\geqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma C+\sqrt{\frac{\pi}{8}}\sigma E/N_0. \tag{3'}$$

Из (3′) видно, что основными элементами оптимального приемного устройства при фазовом методе обнаружения слабого детерминированного сигнала являются фазовый детектор, выделяющий $\cos[\theta(t)-\varphi(t)]$, и коррелометр, вычисляющий взаимную корреляцию выхода детектора и огибающей сигнала. Используя геометрическую интерпретацию [3], можно показать, что оптимальной границей, разделяющей пространство выборок косинуса разности фаз принятого и детерминированного сигналов, является гиперплоскость, перпендикулярная вектору огибающей полезного сигнала, причем расстояние ее от начала координат зависит от отношения E/N_0 и выбранного критерия.

Для синусоидального сигнала постоянной амплитуды $\alpha_i=A$ и фазы $\varphi_i=0$ неравенства (3) и (3′) имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n/2}\cos\theta_i\geqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma C}{A}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{n}{4}\frac{A}{2\sigma}, \tag{4}$$

$$\Delta f\int_0^T\cos\theta(t)\,dt\geqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma C}{A}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{n}{4}\frac{A}{2\sigma}. \tag{4'}$$

В этом случае оптимальное приемное устройство состоит из фазового детектора и интегратора, выход которого сравнивается с заранее установленным порогом.

Если объем выборки велик ($n\geqslant 1$), то распределение суммы независимых случайных величин $\sum_{i=1}^{n/2}\cos\theta_i$ близко к нормальному со средними и дисперсией, равными [4]

$$m_1=0,\quad M_2=\frac{n}{4},$$

когда полезного сигнала нет, и

$$m_1=\frac{n}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{A}{\sigma},\quad M_2=\frac{n}{4},$$

когда сигнал присутствует. Тогда вероятности ложных тревог F и правильного обнаружения D равны *

* Вероятность ложных тревог принято теперь обозначать через F. Следует, однако, помнить, что $F(x)$ — указанный выше интеграл вероятности (см. (1)).

$$F = 1 - F\left(\sqrt{\frac{n\pi}{2}}\frac{A}{4\sigma} + \frac{2\sigma}{A}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}C\right), \tag{5}$$

$$D = 1 - F\left(-\sqrt{\frac{n\pi}{2}}\frac{A}{4\sigma} + \frac{2\sigma}{A}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}C\right). \tag{6}$$

Приведем соответствующие формулы при оптимальной обработке выборки принятого сигнала:

$$F = 1 - F\left(\sqrt{n}\frac{A}{2\sigma} + \frac{\sigma C}{A\sqrt{n}}\right), \tag{5'}$$

$$D = 1 - F\left(-\sqrt{n}\frac{A}{2\sigma} + \frac{\sigma C}{A\sqrt{n}}\right) \tag{6'}$$

и при оптимальной обработке выборки огибающей принятого сигнала:

$$F = 1 - F\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{A^2}{4\sigma^2} + \frac{2\sigma^2 C}{A^2\sqrt{n}}\right), \tag{5''}$$

$$D = 1 - F\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{A^2}{4\sigma^2} + \frac{2\sigma^2 C}{A^2\sqrt{n}}\right). \tag{6''}$$

Из сравнения (5) и (6) с (5′), (6′), (5″) и (6″) видно, что статистические характеристики обнаружения слабого детерминированного сигнала оптимальным фазовым методом лучше, чем при оптимальном амплитудном методе, и близки к абсолютному оптимальному методу.

Для сильного сигнала ($\alpha/\sigma \gg 1$) функция распределения фазы асимптотически нормальна с нулевым средним и дисперсией σ^2/α^2 [4]. Правило решения при этом может быть записано в следующем виде (ср. также с [5]): сигнал присутствует, если

$$\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n/2}\alpha_i^2(\theta_i - \varphi_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n/2}\ln\left(\frac{\alpha_i}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - C, \tag{7}$$

или

$$\frac{\Delta f}{2\sigma^2}\int_0^T \alpha^2(t)[\theta(t) - \varphi(t)]^2\,dt \leqslant \Delta f\int_0^T \ln\left[\frac{\alpha(t)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]dt - C. \tag{7'}$$

Из (7′) видно, что основным элементом оптимального приемного устройства при фазовом методе обнаружения сильного детерминированного сигнала является фазовый детектор, выделяющий квадрат разности фаз принятого и детерминированного сигналов и определяющий взаимную корреляцию выхода фазового детектора и квадрата огибающей сигнала. Оптимальной границей, разделяющей пространство выборок, является гипереллипсоид, полуоси которого определяются компонентами вектора сигнала.

Для синусоидального сигнала постоянной амплитуды $\alpha_i = A$ и фазы $\varphi_i = 0$ неравенства (7) и (7′) имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n/2}\theta_i^2 \leqslant \frac{n\sigma^2}{A^2}\ln\left(\frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{2\sigma^2}{A^2}C,$$

$$\Delta f\int_0^T \theta^2(t)\,dt \leqslant \frac{n\sigma^2}{A^2}\ln\left(\frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{2\sigma^2}{A^2}C.$$

этом случае оптимальное приемное устройство состоит из фазового де-ктора, выделяющего квадрат фазы, и интегратора. Оптимальной грани-ей, разделяющей пространство выборок фаз принятого сигнала, явля-ся гиперсфера, радиус которой зависит от отношения A/σ и выбранного ритерия.

Если объем выборки велик ($n \gg 1$), то распределение суммы незави-имых случайных величин $\sum_{i=1}^{n/2} \theta_i^2$ близко к нормальному со средними и дис ерсиями, равными

$$m_1 = \frac{n\pi^2}{6}, \quad M_2 = \frac{2n\pi^4}{45},$$

огда полезного сигнала нет, и

$$m_1 = \frac{n}{2}\frac{\sigma^2}{A^2}, \quad M_2 = \frac{n\sigma^4}{A^4},$$

огда сигнал присутствует. Тогда вероятности ложных тревог и правиль-ого обнаружения равны

$$F = 1 - F\left\{\frac{1}{\pi^2}\right\}^{\sqrt{45}/2}\left[-\frac{\sigma^2}{A^2}\sqrt{n}\ln\left(\frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{2\sigma^2 C}{A^2\sqrt{n}} + \frac{\pi^2\sqrt{n}}{6}\right]\Bigg\}, \tag{8}$$

$$D = F\left\{\sqrt{n}\left[\ln\left(\frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}\right] - \frac{2C}{\sqrt{n}}\right\}. \tag{9}$$

этом случае, как видно из сравнения (8) и (9) с (5′) и (6′), статистические арактеристики обнаружения оптимальным фазовым методом гораздо уже, чем при абсолютно оптимальной обработке.

3. ОБНАРУЖЕНИЕ ФЛУКТУИРУЮЩЕГО СИГНАЛА

Предположим, что полезный сигнал, так же как и шумы, является тационарным нормальным случайным процессом с нулевым средним отличается от них только энергетическим спектром. Пусть дисперсия олезного сигнала равна σ_s^2. В этом случае функции распределения выборки аз, когда сигнал есть и когда его нет, не отличаются друг от друга:

$$w_{n/2}(\theta_1; \ldots; \theta_{n/2} | s) = w_{n/2}(\theta_1; \ldots; \theta_{n/2} | 0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}$$

ак как одномерная плотность вероятности фазы стационарного нормаль-ого случайного процесса не зависит от энергетического спектра (диспер-ии) процесса и всегда равна $1/2\pi$ ($|\theta| \leqslant \pi$). Следовательно, по независимым ыборкам фазы принятого сигнала невозможно отличить сумму сигнала шума от одного шума, т. е. решить задачу обнаружения флуктуирующе-полезного сигнала. Этот вывод соответствует тому факту, что статисти-еские характеристики оптимальных процедур обнаружения флукту-рующего сигнала до и после амплитудного детектирования совпадают.

Для осуществления фазового метода обнаружения флуктуирующего игнала необходимо иметь независимые выборки разности фаз ($\Delta\theta_1$; ...; $\theta_{n/2}$), где $\Delta\theta_i = \theta(t_i + \tau) - \theta(t_i)$. При этом для каждого элемента выбор-и $\Delta\theta_i$ внутриразностная корреляция учитывается. Используя выражение ункции распределения разности фаз стационарного нормального слу-

чайного процесса [4], запишем отношение правдоподобия в виде

$$l(\Delta\theta_1;\ \ldots;\ \Delta\theta_{n/2}) =$$

$$= \left(\frac{1-R^2}{1-R_0^2}\right)^{n/2} \prod_{i=1}^{n/2} \left[\frac{1-y_i^2}{1-z_i^2}\,\frac{1+z_i\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin z_i\right)(1-z_i^2)^{-1/2}}{1+y_i\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin y^i\right)(1-y_i^2)^{-1/2}}\right],$$

где $R(\tau)$, $R_0(\tau)$ — коэффициенты корреляции суммы сигнала и шума и только шума; $z_i = R\cos\Delta\theta_i$; $y_i = R_0\cos\Delta\theta_i$. Ясно, что

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2 R_0(\tau) + \sigma_s^2 R_s(\tau)}{\sigma^2+\sigma_s^2},$$

где $R_s(\tau)$ - коэффициент корреляции флуктуирующего сигнала, причем $R_s \geqslant R \geqslant R_0$.

Исследование общего случая представляется весьма трудоемким. Ограничимся случаем, когда выборки шума $\theta(t_i+\tau)$ и $\theta(t_i)$ также независимы и $\sigma_s \ll \sigma$ (слабый флуктуирующий сигнал). Полагая $R_0 = 0$ и пользуясь малостью величины

$$R = \frac{(\sigma_s/\sigma)^2}{1+(\sigma_s/\sigma)^2} R_s < \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2},$$

получим $$\ln l(\Delta\theta_1;\ \ldots;\ \Delta\theta_{n/2}) = \frac{\pi R}{2}\sum_{i-1}^{n/2}\cos\Delta\theta_i - \frac{n\pi^2R^2}{16}.$$

Правило решения может быть теперь сформулировано следующим образом: сигнал присутствует, если

$$\sum_{i=1}^{n/2}\cos\Delta\theta_i \geqslant \frac{n\pi R}{8} + \frac{2C}{\pi R}.$$

Оптимальная процедура обнаружения состоит в сравнении выхода интегратора (сумматора) функции $\cos[\Delta\theta(t)]$ с заранее установленным порогом, зависящим от отношения σ_s/σ и выбранного критерия. Оптимальной границей, разделяющей пространство выборок косинусов разностей фаз принятого сигнала, является гиперплоскость, перпендикулярная единичному вектору, причем расстояние ее от начала координат зависит от σ_s/σ и выбранного критерия.

Если объем выборки большой, то распределение суммы независимых случайных величин $\sum_{i=1}^{n/2}\cos\Delta\theta_i$ близко к нормальному со средними и дисперсией, равными [4]

$$m_1 = 0, \quad M_2 = \frac{n}{4},$$

когда полезного сигнала нет, и

$$m_1 = \frac{\pi n}{4}R, \quad M_2 = \frac{n}{4},$$

когда сигнал присутствует. Вероятности ложных тревог и правильного обнаружения равны тогда

$$F = 1 - F\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}R_s\sqrt{n} + \frac{4\sigma^2}{\pi\sigma_s^2R_s}\,\frac{C}{\sqrt{n}}\right),$$

$$D = 1 - F\left(-\frac{\pi}{4}\,\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}R_s\sqrt{n} + \frac{4\sigma^2}{\pi\sigma_s^2R_s}\,\frac{C}{\sqrt{n}}\right).$$

оответствующие формулы при оптимальной обработке принятого сиг-ала имеют вид [1]

$$F = 1 - F\left(\sqrt{2\gamma^2} - \sqrt{2n}\right),$$

$$D = 1 - F\left(\sqrt{2\frac{\sigma^2\gamma^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2}} - \sqrt{2n}\right),$$

де

$$\gamma^2 = \frac{2(\sigma_s^2 + \sigma^2)}{\sigma_s^2}\left[\left(\frac{n}{2}\right)\ln\frac{\sigma_s^2 + \sigma^2}{\sigma^2}\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

В. Питерсон, Т. Бердсал, В. Фокс, Теория обнаружения сигналов, Сб. Теория информации и ее применение, Физматиздат, 1959.

W. H. Huggins, D. Middleton, A comparison of the phase and amplitude principles in signal detection, Proc. Nat. Electronics Conf., 1956, 11.

В. А. Котельников, Сигналы с максимальной и минимальной вероятностями обнаружения, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 354.

Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Изд. Советское радио, 1957.

W. B. Davenport, W. L. Root, An introduction to the theory of random signals and noise, Mc Graw Hill, N. Y., 1958, chapt. 14.

Поступила в редакцию
8 VII 1959

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПОРОГ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИЕМА ТЕПЛОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Красовский, В. Н. Зуйков

На основе формулы Эйнштейна для флуктуаций энергии излучения получены выражения предельного порога чувствительности приемников теплового радиоизлучения. Плоскость длин волн и яркостных температур делится на две области. В первой области справедливы обычно применяющиеся формулы порога чувствительности. Во второй области — области коротких волн и низких температур — сохраняют силу рассматриваемые формулы.

ВВЕДЕНИЕ

Предельная чувствительность приемника электромагнитного излу чения обусловлена флуктуациями самого излучения. Вопросам предельно чувствительности приемников (детекторов) инфракрасного и видимого и лучений посвящено большое число работ [1—7]. В наиболее обстоятельны из этих работ предельные пороги чувствительности определяются посре ством соотношений общей теории излучения, которые в количественно отношении охватывают плавный переход от потока независимых фотон к классической форме электромагнитных волн. В некоторых работах, в о стности интересной работе Габора [8], общая формула Эйнштейна дл флуктуаций энергии излучения черного тела применяется к задаче пер дачи сообщений.

Порог чувствительности приемников радиотеплового излучения — р диометров — определялся до последнего времени на основе классическо представления (без учета квантового эффекта), полностью оправданно в области высоких температур и длин волн, далеких от инфракрасно диапазона.

Однако уменьшение внутренних шумов приемников, возможное пр движение в сторону наиболее коротких радиоволн (субмиллиметровый ди пазон) обусловили актуальность задачи определения предельной чу ствительности радиометра с учетом квантового эффекта. В стат Н. В. Карлова и Б. М. Чихачева [9] на основе квантовой формулы На квиста получено выражение порога чувствительности, обусловленно внутренними тепловыми шумами, для радиометра определенной схем (относительно узкая полоса пропускания, квадратичное детектиров ние, компенсационная схема). В работе тех же авторов [10] указа ная формула чувствительности радиометра применена для радиотеле копа.

Целью данной работы является определение предельного порога чу ствительности приемника теплового радиоизлучения произвольного ти Подобное общее решение задачи получается на основе формулы Эйнште на [12] при условии, когда внутренние шумы приемника либо отсу ствуют, либо могут быть приведены к некоторому эквивалентному фо с определенной яркостной температурой. Такой подход к решению зада целесообразен также с точки зрения сопоставления некоторых возмо ностей приемников радиотеплового и инфракрасного излучений.

1. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПОРОГ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ, ВЫРАЖЕННЫЙ В ПРИРАЩЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ АНТЕННЫ

Рассмотрим случай, когда антенна приемника теплового радиоизлучения находится внутри сферы с яркостной температурой стенки T. Требуется определить предельный порог чувствительности в виде минимального приращения температуры δT, различимого на фоне флуктуаций излучения.

Внутри сферы в рассматриваемых условиях будет иметь место черное излучение с температурой T.

Энергия излучения, проходящего за время τ через площадку A в телесном угле $d\Omega$ и имеющего интервал частот от ν до $\nu + d\nu$, выражается формулой

$$E_{\Omega\nu} d\Omega d\nu = \frac{2hA\tau}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\Omega\, d\nu, \qquad (1)$$

где h — постоянная Планка; k — постоянная Больцмана; c — скорость света; $\frac{4\pi}{Ac\tau} E_{\Omega\nu}$ — плотность энергии излучения.

Формула Эйнштейна выражает среднеквадратичное значение флуктуаций энергии черного излучения. Применительно к данному случаю эту формулу можно записать в виде

$$\overline{\Delta E^2_{\Omega\nu}} d\Omega\, d\nu = h\nu E_{\Omega\nu} \left[1 + \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \right] d\Omega\, d\nu,$$

где $\overline{\Delta E^2_{\Omega\nu}} d\Omega\, d\nu$ — дисперсия энергии излучения, для которого среднее значение энергии равно $E_{\Omega\nu} d\Omega\, d\nu$. Флуктуации, соответствующие различным пучкам, статистически независимы. Поэтому дисперсия энергии в частотном диапазоне $d\nu$, поступающей к антенне по всем направлениям, выразится формулой

$$\overline{\Delta E^2_\nu}\, d\nu = d\nu \int_{4\pi} \overline{\Delta E^2_{\Omega\nu}} d\Omega = \frac{2h^2\nu^4\tau}{c^2} \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^2} d\nu \int_{4\pi} A d\Omega.$$

Известно, что средняя воспринимающая площадь антенны, вычисленная с учетом приема компонент излучения с одной поляризацией, равна

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} A d\Omega = \frac{\lambda^2}{8\pi}, \qquad (2)$$

где $\lambda = c/\nu$ — длина волны.

Таким образом,

$$\overline{\Delta E^2_\nu}\, d\nu = \frac{\tau h^2 \nu^2 \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^2} d\nu.$$

Будем считать, что приемник теплового радиоизлучения полностью воспринимает энергию в диапазоне частот от ν_1 до ν_2. Дисперсия флуктуаций энергии, принимаемой за время τ в полосе воспринимаемых частот $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$, выразится формулой

$$\overline{\Delta E^2} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \overline{\Delta E^2_\nu}\, d\nu = \tau h^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\nu^2 \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^2} d\nu.$$

Учитывая, что

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\nu^2 \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]^2}\, d\nu = \frac{1}{4}\, \frac{\nu_{\text{ср}}^2 F}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{h\nu_{\text{ср}}}{2kT}\right)},$$

где $\nu_{\text{ср}}$ — некоторая средняя частота в полосе $F = \nu_2 - \nu_1$, получаем

$$\sqrt{\overline{\Delta E^2}} = kT\sqrt{F\tau}\, \frac{x}{\operatorname{sh} x}, \qquad (3)$$

где $x = h\nu_{\text{ср}}/2kT$.

Энергия теплового излучения, принимаемого за время τ, определяется из (1), где

$$\int_{4\pi} A\, d\Omega = \frac{1}{2}\,\lambda^2 = \frac{c^2}{\nu^2},$$

$$E = \int_{\nu_1}^{\nu_2}\int_{4\pi} E_{\Omega\nu}\, d\Omega\, d\nu = \tau h \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\nu d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}.$$

Если температура получает малое приращение δT, то приращение энергии E выразится формулой

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial T}\, \delta T = \tau k F\, \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x}\, \delta T.$$

Минимальное приращение температуры δT, которое может быть обнаружено на фоне флуктуаций энергии излучения, находим из соотношения

$$\delta E = \sqrt{\overline{\Delta E^2}},$$

откуда

$$\delta T = \frac{T}{\sqrt{F\tau}}\, \frac{\operatorname{sh} x}{x}. \qquad (4)$$

Последняя формула указывает на предельный порог чувствительности, выраженный в приращениях температуры излучения, или, что то же самое, в приращениях температуры антенны, находящейся в равновесии с излучением. Формула выведена для случая, когда антенна находится в поле излучения замкнутой поверхности. Очевидно, что формула сохраняет силу и для тех условий, когда антенна направлена на поверхность с яркостной температурой T и угловыми размерами, существенно превышающими раствор диаграммы направленности. В последнем случае отклонения от формулы (4) могут иметь место за счет влияния боковых лепестков. Применительно к радиометру супергетеродинной схемы полоса пропускаемых частот F равна полосе пропускания по промежуточной частоте, а время накопления τ равно постоянной времени фильтра на выходе.

Формула (4) близка к частному выражению порога чувствительности компенсационного радиометра, полученному в [9] на основе учета внутренних тепловых шумов согласно квантовой формуле Найквиста.

Принципиальное отличие формулы (4) от формулы чувствительности, не учитывающей квантовой структуры излучения (см., например, [11]),

лючается в наличии множителя

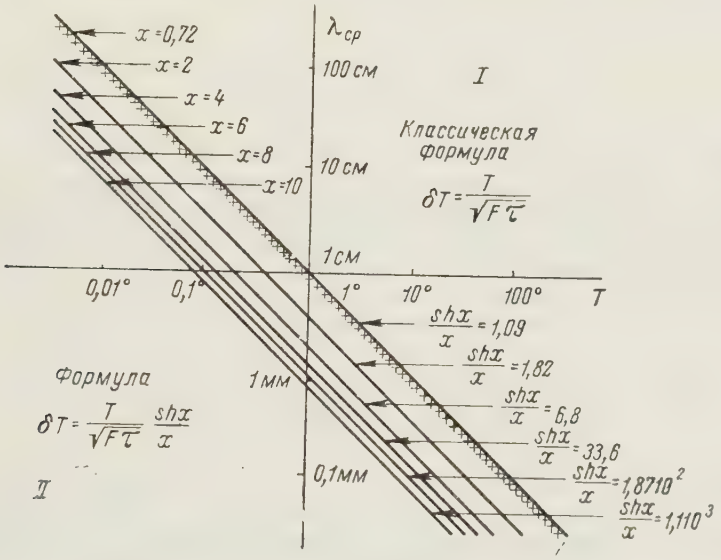
$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \frac{\exp\left(\frac{h\nu_{\text{ср}}}{2kT}\right) - \exp\left(-\frac{h\nu_{\text{ср}}}{2kT}\right)}{\frac{h\nu_{\text{ср}}}{kT}},$$

орый близок к единице при

$$\lambda_{\text{ср}} T > 1 \quad [\text{см} \cdot \text{град}],$$

$\lambda = c/\nu_{\text{ср}}$ — средняя длина волны, и быстро нарастает с уменьшением T.

Линии равных значений множителя $\operatorname{sh} x/x$ изображены на рисунке. осям в логарифмических масштабах отложены $\lambda_{\text{ср}}$ и T. Прямая



$_{\text{ср}} = -\lg T$ делит плоскость ($\lg \lambda_{\text{ср}}$, $\lg T$) на две полуплоскости. В хней правой полуплоскости сохраняет силу формула предельной ствительности вида

$$\delta T = \frac{T}{\sqrt{F\tau}}.$$

ижней левой полуплоскости, охватывающей область низких темпе-ур и коротких волн, необходимо применение формулы (4).

Укажем на два ограничения применения формулы (4). Первое из связано с тем, что в соотношении (4) принято $\delta T/T \ll 1$. Неравен-о может не иметь места при очень низких T и малых значениях $F\tau$. ограничение легко устранить, не прибегая к допущению о малости ращения δT.

Второе ограничение связано с тем, что соотношение (2) справедливо ько для приемников радиоизлучения, имеющих антенны. Для прием-ов субмиллиметровых волн и, тем более, приемников инфракрасного учения правильнее считать, что воспринимающая площадь A не исит от λ и определяется геометрическими размерами чувствитель-о элемента (детектора излучения). Для краткости эти приемники ем называть оптическими. В этом случае дисперсия принимаемой зремя τ энергии будет равна

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{2\pi\tau h^2 A}{c^2}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\frac{\nu^4\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]^2}d\nu = \frac{8\pi k^4}{h^2c^2}\,\frac{\tau AF}{\operatorname{sh}^2 x}\,x^4T^4, \qquad (4)$$

где x несколько отличается от аналогичной величины в предыдущих формулах ввиду наличия ν^4 вместо ν^2 под знаком интеграла. Спектральная характеристика здесь, как и выше, принимается прямоугольной.

Формула (5) аналогична формуле Филлгетта [6].

Для оптического приемника величина δE выразится формулой

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial T}\,\delta T = \frac{2\pi k^3}{h^2c^2}\,\frac{\tau AF}{\operatorname{sh}^2 x}\,x^4T^2\delta T.$$

Предельная чувствительность оптического приемника, выраженная в приращении яркостной температуры, равна

$$\delta T = \frac{T}{\sqrt{F\tau}}\,\frac{\operatorname{sh} x}{x}\,\frac{\lambda_{\text{ср}}}{\sqrt{8\pi A}}. \qquad (6)$$

Выражение (6) отличается от выражения (4) наличием множителя $\lambda_{\text{ср}}/\sqrt{8\pi A}$. Из формул (4) и (6) вытекает, что при данном значении ν ($\lambda_{\text{ср}}$) и прочих равных условиях существует температура фона T, при которой порог чувствительности минимален. Эта температура легко определяется из условия

$$\frac{\partial\delta T}{\partial T} + \frac{\partial\delta T}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial T} = 0,$$

что дает

$$T = \frac{0{,}38}{\lambda_{\text{ср}}}.$$

При $\lambda_{\text{ср}} = 3$ *см* $T = 0{,}126°$ K; при $\lambda_{\text{ср}} = 1$ *мм* $T = 3{,}8°$ K.

2. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРИ ПЕЛЕНГАЦИИ МАЛОРАЗМЕРНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Определим минимальное значение T_n яркостной температуры источника с угловым размером ω, при которой последний может быть обнаружен на фоне с яркостной температурой T.

Телесный угол ω будем считать значительно меньшим телесного угла диаграммы направленности антенны

$$\omega \ll \Omega = \frac{4\pi}{G_m} = \frac{c^2}{2A_m\nu^2},$$

где G_m — коэффициент усиления антенны. Энергия источника, воспринимаемая за время τ направленной на него антенной, равна

$$E = \frac{2h\omega\tau}{c^2}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\frac{A_m\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_n}\right)-1}d\nu = \frac{h\omega\tau}{\Omega}\,\frac{\nu'_{\text{ср}}F}{\exp\left(\frac{h\nu'_{\text{ср}}}{kT_n}\right)-1}.$$

Условия возможности обнаружения принимаем в виде

$$E = \sqrt{\overline{\Delta E^2}},$$

где $\sqrt{\overline{\Delta E^2}}$ — среднеквадратичное значение флуктуаций энергии изл

ния фона *, выражаемое формулой (3). Отсюда

$$\frac{2x_n}{\exp 2x_n - 1} T_n = \frac{\Omega}{\omega} \frac{T}{\sqrt{F\tau}} \frac{x}{\operatorname{sh} x}, \qquad (7)$$

$$x_n = \frac{h\nu'_{\text{ср}}}{2kT_n}; \quad x = \frac{h\nu_{\text{ср}}}{2kT}.$$

ли $x_n < 1$, $x < 1$, как это имеет место для области I (см. рисунок), формула (7) принимает известный вид

$$T_n = \frac{\Omega}{\omega} \frac{T}{\sqrt{F\tau}}.$$

ли $x_n < 1$ (сравнительно высокая температура источника) и $x > 1$ зкая температура фона), то

$$T_n = \frac{\Omega}{\omega} \frac{T}{\sqrt{F\tau}} \frac{x}{\operatorname{sh} x}. \qquad (8)$$

личина $x/\operatorname{sh} x$ быстро уменьшается с увеличением x (см. рисунок). Формула (8) указывает на принципиальную возможность обнаружения нь малых (весьма малые значения ω) источников в том случае, когда пература фона и используемый диапазон волн соответствует области а температура источника при том же диапазоне соответствует обла- I.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПОРОГ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПРИЕМЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Если при наличии фона с температурой T рассматривать порог чувительности приема монохроматического излучения или излучения со ктром, целиком укладывающимся в полосу F, то пороговая мощность ого излучения определится соотношением

$$P\tau = \sqrt{\overline{\Delta E^2}},$$

уда

$$P = kT \sqrt{\frac{F}{\tau}} \frac{x}{\operatorname{sh} x}. \qquad (9)$$

бласти I, где $x/\operatorname{sh} x \simeq 1$, при $\tau = 1/F$ выражение (9) принимает вид

$$P = kTF,$$

е. совпадает с формулой Найквиста (без квантового множителя). В области II низких температур и коротких волн формула (9) дает ультат, не совпадающий с квантовой формулой Найквиста. Выражение (9), так же как и формула (8), указывает на значительные можности, которые содержит область II. В этой области множитель их может быть мал и предельные пороги чувствительности низки. При м, однако, время накопления сигнала τ для условий, соответствующих тренним точкам области II, должно быть большим. Действительно, среднее число фотонов, поступающих за время τ, в об-

* Ввиду малости углового размера источника экранирующее действие его не ываем.

ласти II с достаточной точностью выражается формулой

$$n = \frac{P\tau}{h\nu_{\text{ср}}}.$$

Если мощность P имеет пороговое значение (9), то

$$n = \frac{kT}{h\nu_{\text{ср}}} \sqrt{F\tau}\, \frac{x}{\operatorname{sh} x}.$$

Для получения достаточной вероятности обнаружения величина должна быть больше единицы, и тогда

$$\tau > \frac{4 \operatorname{sh}^2 x}{F}.$$

При движении в глубь области II необходимое время накопления быст возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. W. Milatz, H. A. van der Velden, Physica, 1943, **10**, 36
2. M. Golay, Rev. Scient. Instrum., 1947, **18**, 347.
3. P. Glark Janes, J. Opt. Soc. America, 1947, **37**, 11, 879.
4. P. W. Fellgett, Proc. Phys. Soc., 1949, **62**, 1335.
5. W. B. Lewis, Proc. Phys. Soc., 1947, **59**, 34.
6. P. B. Fellgett, J. Opt. Soc. America, 1949, **39**, 11, 970.
7. R. C. Janes, Advances Electronics, 1953, **55**, 5, 2.
8. D. Gabor, Philos. Mag., 1950, **41**, 1161.
9. Н. В. Карлов, Б. М. Чихачев, О чувствительности радиометра с м лым уровнем собственных шумов (в квантовой области), Радиотехника и элект ника, 1959, **4**, 6, 1047.
10. Н. В. Карлов, Б. М. Чихачев, О чувствительности радиотелеско при малых уровнях входных шумов, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 6, 10.
11. R. H. Dicke, Rev. Scient. Instrum., 1946, **17**, 268.
12. С. И. Вавилов, Микроструктура света, Изд. АН СССР, 1950.

Поступила в редакцию
2 IV 1959

960 № 4

ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ШУМОВ НА ВЫХОДЕ УСИЛИТЕЛЕЙ С ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю. Б. Черняк

Спектральным методом определяется взаимная корреляция мгновенных значений напряжений шумов и их огибающих, а также совместное распределение огибающих на выходе двух каналов по заданным частотным характеристикам и энергетическому спектру шумов на входе. Найдена зависимость коэффициента корреляции мгновенных значений напряжений шумов и их огибающих от расстройки контуров для двух резонансных усилителей с любым числом каскадов.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих радиотехнических задачах, связанных с исследованиями многоканальных систем, выходные напряжения соседних каналов нельзя считать независимыми вследствие пересечения частотных характеристик каналов и наличия общего источника шумов на входе. В том случае, когда каждый из каналов является линейной системой с достаточно узкой полосой пропускания (по сравнению со средней частотой канала), шумы на выходе каждого канала имеют нормальный закон распределения. Совместное распределение шумов в двух соседних каналах также является в этом случае двумерным нормальным.

Для нахождения совместного распределения, наиболее полно описывающего статистические свойства шумов на выходе, надо знать коэффициент взаимной корреляции мгновенных значений напряжений шумов. Часто на выходе линейных систем имеются детекторы, выделяющие огибающие шумов. Поэтому практический интерес представляет также нахождение совместного распределения огибающих и их взаимной корреляции по заданным частотным характеристикам конкретных радиотехнических устройств. В работе [1] использован временно́й метод для нахождения взаимной корреляции в совпадающие моменты времени на выходе двух простейших фильтров, состоящих из одиночных контуров. В настоящей работе применен спектральный метод нахождения взаимной корреляции, в ряде случаев более простой и пригодный как для систем, состоящих из одиночных контуров, так и для двух резонансных усилителей с любым числом каскадов. Рассмотрен также предельный случай аппроксимации частотной характеристики усилителя гауссовой кривой.

1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Пусть на вход двух линейных каналов с пересекающимися частотными характеристиками $K_1(i\omega)$ и $K_2(i\omega)$ (рис. 1) подается стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с энергетическим спектром $F(\omega)$. Тогда на выходе каналов будем иметь два стационарных случайных процесса $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, а после амплитудного детектирования — $r_1(t)$ и $r_2(t)$.

Взаимная корреляционная функция мгновенных значений напряжений $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ определяется как

$$B_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_1(t)\,\xi_2(t+\tau)\,dt.$$

Можно показать, что $B_{12}(\tau)$ выражается через частотные характеристики каналов и энергетический спектр шума на входе следующим образом:

$$B_{12}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,K_1(i\omega)\,K_2^*(i\omega)\,e^{-i\omega\tau}\,d\omega, \qquad (1)$$

где звездочкой обозначено комплексно-сопряженное значение. Представляя $K_n(i\omega)$ в виде

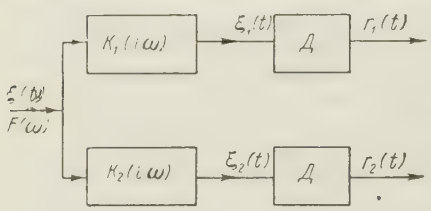


Рис. 1

$$K_n(i\omega) = K_n(\omega)\,e^{i\varphi_n(\omega)}, \quad n = 1,2$$

и учитывая четность энергетического спектра $F(\omega)$, четность модуля коэффициента передачи $K(\omega)$ и нечетность фазовой характеристики $\varphi(\omega)$, получаем

$$B_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)\,K_1(\omega)\,K_2(\omega)\cos[\omega\tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)]\,d\omega. \qquad (2)$$

Коэффициент взаимной корреляции $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ определяется как

$$R(\tau) = \frac{B_{12}(\tau) - a_1 a_2}{\sigma_1\sigma_2}, \qquad (3)$$

где a_1 и a_2 — средние значения ξ_1 и ξ_2; σ_1^2 и σ_2^2 — дисперсии ξ_1 и ξ_2. Очевидно, что

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)\,K_n^2(\omega)\,d\omega, \quad n = 1,\ 2.$$

Подставляя (1) или (2) в (3), получим при $a_1 = a_2 = 0$

$$R(\tau) = \frac{1}{4\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,K_1(i\omega)\,K_2^*(i\omega)\,e^{-i\omega\tau}\,d\omega$$

или

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_0^{\infty} F(\omega)\,K_1(\omega)\,K_2(\omega)\cos[\omega\tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)]\,d\omega. \qquad (4)$$

2. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОГИБАЮЩИХ И ИХ ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

В том случае, когда полосы пропускания каналов малы по сравнению с резонансной частотой, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ могут быть представлены в виде

$$\xi_n(t) = r_n(t)\cos\varphi_n(t), \quad n = 1,2, \qquad (5)$$

где $r(t)$ — огибающая процесса; $\varphi(t)$ — его фаза. Для нахождения совместного распределения огибающих введем два вспомогательных про-

сса $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$, находящихся в квадратуре с $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ соответственно:

$$\eta_n(t) = -r_n(t)\sin\varphi_n(t), \quad n = 1,2. \tag{6}$$

спользуя выражение (4), получим следующие значения коэффициентов рреляции:

$$R(\tau) = R_{\xi_1\xi_2} = R_{\eta_1\eta_2} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_0^\infty F(\omega)\,K_1(\omega)\,K_2(\omega)\cos[\omega\tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)]\,d\omega, \tag{7}$$

$$S(\tau) = R_{\xi_1\eta_2}(\tau) = -R_{\xi_2\eta_1}(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_0^\infty F(\omega)\,K_1(\omega)\,K_2(\omega)\sin[\omega\tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)]\,d\omega. \tag{8}$$

дальнейшем пары $\xi_1(t)$, $\eta_1(t)$ и $\xi_2(t)$, $\eta_2(t)$ рассматриваются в совпающие моменты времени. Поэтому, в силу их ортогональности,

$$R_{\xi_1\eta_1}(0) = R_{\xi_2\eta_2}(0) = 0.$$

скольку $\xi_n(t)$ и $\eta_n(t)$ являются нормальными случайными процессами нулевыми средними значениями и дисперсией σ_n^2, можно, зная коэффициенты корреляции $R(\tau)$ и $S(\tau)$, написать совместное распределение, которое также будет нормальным [2]:

$$W_4[\xi_1(t);\ \eta_1(t);\ \xi_2(t+\tau);\ \eta_2(t+\tau)] =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{\sigma_2^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2R(\tau)}{\sigma_1\sigma_2}(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) - \frac{2S(\tau)}{\sigma_1\sigma_2}(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\right]\right\},$$

$$\rho^2(\tau) = R^2(\tau) + S^2(\tau). \tag{9}$$

реходя к полярным координатам (5) и (6) и выполняя интегрирова- по φ_1 и φ_2 в пределах от 0 до 2π, получаем следующее совместное спределение огибающих:

$$W_2[r_1(t);\ r_2(t+\tau)] =$$

$$= \frac{r_1 r_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2[1-\rho^2(\tau)]}\exp\left\{-\frac{\frac{r_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{r_2^2}{\sigma_2^2}}{2[1-\rho^2(\tau)]}\right\} I_0\left[\frac{\rho(\tau)}{[1-\rho^2(\tau)]}\frac{r_1 r_2}{\sigma_1\sigma_2}\right], \tag{10}$$

$I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. спределение (10) является обобщением распределения огибающих в ном канале, рассматриваемых в разные моменты времени [2]. Послед- получается из (10), если считать, что

$$K_1(\omega) \equiv K_2(\omega), \quad \varphi_1(\omega) \equiv \varphi_2(\omega).$$

Для выяснения физического смысла параметра $\rho(\tau)$ перепишем (7)

и (8) в виде

$$R(\tau) = \int_0^\infty a(\omega)\cos\omega\tau d\omega + \int_0^\infty b(\omega)\sin\omega\tau d\omega,$$

$$S(\tau) = \int_0^\infty b(\omega)\cos\omega\tau d\omega - \int_0^\infty a(\omega)\sin\omega\tau d\omega, \tag{11}$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} F(\omega) K_1(\omega) K_2(\omega)\cos[\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)];$$

$$b(\omega) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} F(\omega) K_1(\omega) K_2(\omega)\sin[\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)].$$

Из (11) вытекает, что $R(\tau)$ и $S(\tau)$ являются сопряженными по Гильберту [3], а, следовательно, $\rho(\tau)$ (см. (9)) представляет собой огибающую коэффициента корреляции мгновенных значений напряжений шумов $R(\tau)$.

В предельном случае больших расстроек каналов или при $\tau \to \infty$ получаем $\rho(\tau) = 0$ и, следовательно,

$$W_2(r_1, r_2) = \frac{r_1}{\sigma_1^2} e^{-r_1^2/2\sigma_1^2} \frac{r_2}{\sigma_2^2} e^{-r_2^2/2\sigma_2^2},$$

т. е. в этих случаях $W_2(r_1, r_2)$ оказывается произведением двух релеевских распределений. В другом предельном случае, когда $\tau = 0$ и расстройка $\Delta\omega$ отсутствует, $\rho = 1$ (при условии, что $K_1(i\omega) = K_2[i(\omega - \Delta\omega)]$). Используя асимптотическое разложение

$$I_0(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}},$$

получаем

$$W_2(r_1, r_2) = \left[\frac{r_1}{\sigma_1^2} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma_1^2}} \frac{r_2}{\sigma_2^2} e^{-\frac{r_2^2}{2\sigma_2^2}}\right]^{1/2} \delta(r_1 - r_2),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

По определению взаимная корреляционная функция огибающих есть

$$B_{r_1r_2}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty r_1(t) r_2(t+\tau) W_2[r_1(t), r_2(t+\tau)] dr_1 dr_2, \tag{12}$$

где $W_2(r_1, r_2)$ дается выражением (10).

Как показано в [4], интеграл (12) приводится к выражению

$$B_{r_1r_2}(\tau) = \sigma_1\sigma_2\{2E(\rho) - (1-\rho^2) K(\rho)\}, \tag{13}$$

где $K(\rho)$ и $E(\rho)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Выражение (13) можно представить рядом

$$B_{r_1r_2}(\tau) = \frac{\pi\sigma_1\sigma_2}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\rho^2(\tau) + \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2\rho^4(\tau) + \ldots\right]. \tag{14}$$

Учитывая, что для огибающих, распределенных по закону Релея, средние значения и средние квадраты равны

$$\bar{r}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma_n, \quad \overline{r_n^2} = 2\sigma_n^2, \quad n = 1,2,$$

найдем коэффициент корреляции огибающих, используя (13), (14), (3):

$$R_{r_1 r_2}(\tau) = \frac{2}{4-\pi}\left[2E(\rho) - (1-\rho^2)\,K(\rho) - \frac{\pi}{2}\right].$$

Для значений $\rho(\tau)$, не очень близких к единице,

$$R_{r_1 r_2}(\tau) \simeq 0{,}92\,\rho^2(\tau).$$

Применим полученные выражения для нахождения корреляции мгновенных значений шумов и их огибающих на выходе резонансных усилителей с различным числом каскадов.

3. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ ШУМОВ НА ВЫХОДЕ ДВУХ ОДНОКАСКАДНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Коэффициент передачи усилителя в этом случае совпадает с частотной характеристикой контура LC (не уменьшая общности, величину макси-

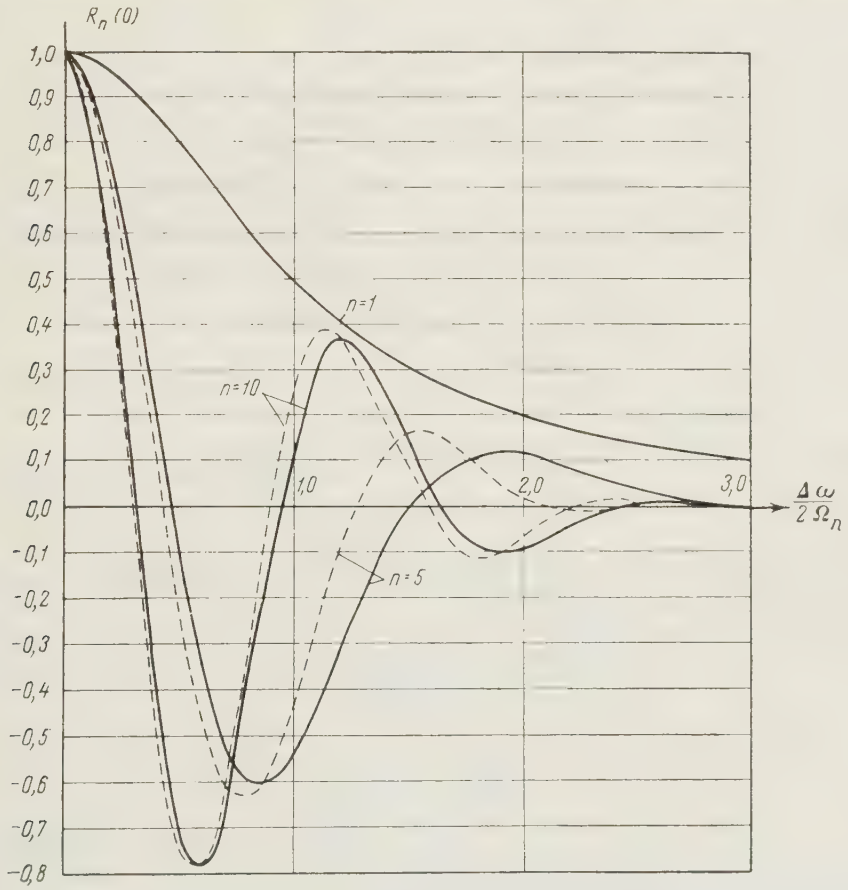


Рис. 2

мального коэффициента усиления будем считать равной единице):

$$K_1(i\omega) = \frac{1}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \qquad (15)$$

где $\omega_0/2\pi$ — резонансная частота; Q — добротность контура. Пусть контур второго усилителя обладает теми же параметрами, что и первый,

но расстроен по частоте относительно первого на величину $\Delta\omega$:

$$K_2(i\omega) = \frac{1}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0 + \Delta\omega} - \frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega}\right)}. \tag{16}$$

Подставив (15) и (16) в (1) и считая, что

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \quad \Omega \ll \omega_0,$$

где $2\Omega/2\pi = \omega_0/2\pi Q$ — полная полоса пропускания на уровне $3\partial\delta$ (в герцах), получим

$$B_{12}(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\frac{\omega^2\omega_0^2 e^{-i\omega\tau}}{(\omega - p_1)(\omega - p_2)(\omega - p_3)(\omega - p_4)}\,d\omega,$$

$$p_{1,2} = \pm\omega_0 + i\Omega;$$

$$p_{3,4} = \pm\omega_0 \pm \Delta\omega - i\Omega.$$

Интеграл вычисляется путем контурного интегрирования в плоскости комплексной частоты, что дает

$$B_{12}(\tau) = \frac{1}{4}\frac{e^{-\Omega|\tau|}}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2}\operatorname{Im}\left[(\Delta\omega - 2i\Omega)F(\omega_0 + i\Omega)e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)\tau}\right]. \tag{17}$$

В том случае, когда шум на входе белый, так что $F(\omega) = N_0$, находим из (17)

$$B_{12}(\tau) = \frac{N_0\Omega e^{-\Omega|\tau|}}{2\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2}}\cos(\omega_0\tau + \varphi),$$

где $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta\omega}{2\Omega}$.

Так как

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = B_{12}(\tau)\big|_{\substack{\Delta\omega=0\\ \tau=0}} = \frac{N_0\Omega}{2},$$

то, на основании (3), коэффициент корреляции мгновенных значений напряжений шумов равен

$$R_1(\tau) = \frac{e^{-\Omega|\tau|}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2}}\cos(\omega_0\tau + \varphi). \tag{18}$$

При $\tau = 0$ имеем

$$R_1(0) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2}.$$

Зависимость $R_1(0)$ от расстройки приведена на рис. 2 (кривая $n = 1$); она изображается монотонно убывающей кривой. Коэффициент корреляции огибающих найдем как квадрат огибающей выражения (18):

$$\rho^2(\tau) = \frac{e^{-2\Omega|\tau|}}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2}. \tag{19}$$

Зависимость $\rho^2(0)$ от расстройки показана на рис. 3.

4. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ ШУМОВ НА ВЫХОДЕ ДВУХ n-КАСКАДНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Рассмотрим два резонансных усилителя, каждый из которых состоит из n настроенных одиночных контуров. Пусть резонансная частота первого усилителя ω_0, а второго $\omega_0 + \Delta\omega$. Найдем корреляцию шумов на выходе при условии, что на входе действует белый шум и полоса пропускания каждого усилителя $2\Omega_n \ll \omega_0$.

Согласно (1)

$$B_{12}(\tau) = \frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(i\omega)\, K_2^*(i\omega)\, e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

Пользуясь известной в теории преобразования Фурье теоремой о свертывании, получим

$$B_{12}(\tau) = \frac{N_0}{2}\int_0^{\infty} h_1(t)\, h_2(t+\tau)\, dt, \quad (20)$$

где $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — импульсные переходные характеристики 1-го и 2-го усилителей соответственно.

Как определено в работе [5], переходная характеристика резонансного усилителя, состоящего из n одиночных одинаково настроенных контуров, при воздействии на него ступенчатого импульса есть ($t > 0$)

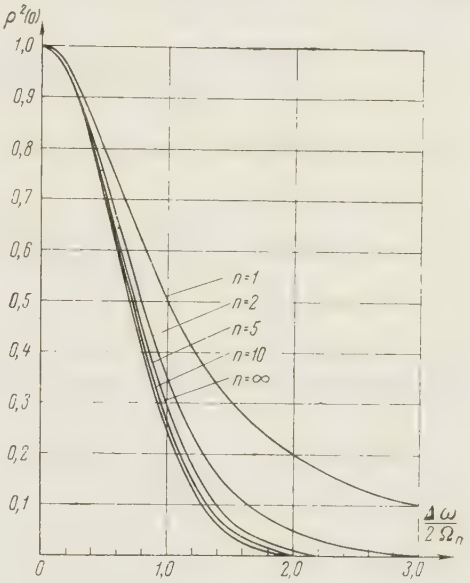


Рис. 3

$$A(t) = \frac{2}{\omega_0}\Omega^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Omega t} \sin\omega_0 t,$$

где 2Ω — полоса пропускания одиночного контура на уровне половинной мощности. Следовательно,

$$h(t) = \frac{dA}{dt} = 2\Omega^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Omega t} \cos\omega_0 t, \quad \tau > 0.$$

Пренебрегая в интеграле (20) членами, содержащими быстроосциллирующий множитель с частотой $2\omega_0$, получим

$$B(\tau) = \frac{N_0\Omega^{2n} e^{-\Omega\tau}}{[(n-1)!]^2}\int_0^{\infty} t^{n-1}(t-\tau)^{n-1} e^{-2\Omega t} \cos(\Delta\omega t + \omega_0\tau)\, dt, \quad \tau > 0.$$

Это выражение можно привести к виду

$$B(\tau) = \frac{N_0\Omega e^{-\Omega\tau}}{2^{2n-1}(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-2-k)!}{k!(n-1-k)!}\frac{(2\Omega\tau)^k\cos(\omega_0\tau+\varphi_k)}{\left[1+\left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2\right]^{\frac{2n-1-k}{2}}}, \quad \tau > 0. \quad (21)$$

где

$$\varphi_k = (2n-1-k)\operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta\omega}{2\Omega}.$$

При выводе (21) использован табличный интеграл [6]

$$\int_0^\infty x^{r-1}e^{-px}\cos(qx+\varphi)\,dx = \frac{(r-1)!}{\sqrt{(p^2+q^2)^r}}\cos\left(r\operatorname{arc\,tg}\frac{q}{p}+\varphi\right).$$

При $n=1$ получаем из (21) выражение, полностью совпадающее с результатом (18), найденным более строгим путем. Так как

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=B(\tau)\big|_{\substack{\Delta\omega=0\\ \tau=0}}=\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}N_0\Omega,$$

то, на основании (5), имеем ($\tau>0$)

$$R_n(\tau)=\frac{(n-1)!}{(2n-2)!}\,e^{-\Omega\tau}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-2-k)!}{k!\,(n-1-k)!}\,\frac{(2\Omega\tau)^k\cos(\omega_0\tau+\varphi_k)}{\left[1+\left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2\right]^{\frac{2n-1-k}{2}}}.$$

Для совпадающих моментов времени ($\tau=0$)

$$R_n(0)=\frac{\cos\left\{(2n-1)\operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right\}}{\left[1+\left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2\right]^{\frac{2n-1}{2}}}. \tag{22}$$

Для сравнительной оценки усилителей с различным числом каскадов введем в последнее выражение полосу пропускания n-каскадного усилителя (по уровню половинной мощности) $2\Omega_n$. Как известно,

$$2\Omega_n=2\Omega\varphi_n, \tag{23}$$

где

$$\varphi_n=\sqrt{2^{1/n}-1}.$$

Подставляя (23) в (22), получаем

$$R_n(0)=\frac{\cos\left\{(2n-1)\operatorname{arc\,tg}\left(\varphi_n\frac{\Delta\omega}{2\Omega_n}\right)\right\}}{\left[1+\varphi_n^2\left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega_n}\right)^2\right]^{\frac{2n-1}{2}}}. \tag{24}$$

Зависимость $R_n(0)$ от $\Delta\omega/2\Omega_n$ для $n=1$, 5 и 10 показана на рис. 2 (сплошные кривые).

Для $n=5$ и 10 получаются осциллирующие кривые, в то время как для $n=1$ кривая монотонно убывает с расстройкой. Различное поведение кривых при $n=1$ и $n\geqslant 2$ объясняется тем, что разность фаз выходных напряжений в совпадающие моменты времени для однокаскадных усилителей не может достигать значения $\pi/2$ ни при каких расстройках. Следовательно, в этом случае шумовые выбросы, имеющие в совпадающие моменты времени одинаковый знак, превалируют над выбросами разных знаков, что и приводит к положительному коэффициенту корреляции.

многокаскадных же усилителях ($n \geqslant 2$) разность фаз выходных напряжений в совпадающие моменты времени может при некоторых расстройках превышать $\pi/2$ и, следовательно, шумовые выбросы разных знаков могут превалировать над выбросами одинакового знака. Обращение коэффициента корреляции в нуль для $\tau = 0$ получается при таких расстройках, при которых шумовые выбросы одинаковых знаков компенсируются выбросами разных знаков. Таким образом, знание коэффициента корреляции мгновенных значений напряжений шумов в совпадающие моменты времени недостаточно для оценки зависимости шумов на выходе соседних каналов.

Для нахождения корреляции огибающих в совпадающие моменты времени найдем $S(0)$. Для узкополосной системы можно определить $S(0)$ на основании (7) и (8) как

$$S(0) \simeq \frac{1}{\omega_0} \left.\frac{\partial R}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}. \tag{25}$$

Используя (25), получим

$$S(0) \simeq \frac{\sin\left[(2n-1)\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\Delta\omega}{2\Omega}\right]}{\left[1+\left(\dfrac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2\right]^{\frac{2n-1}{2}}}.$$

Следовательно, согласно (9),

$$\rho_n^2(0) = \frac{1}{\left[1+\left(\dfrac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)^2\right]^{2n-1}} = \frac{1}{\left[1+\varphi_n^2\left(\dfrac{\Delta\omega}{2\Omega_n}\right)^2\right]^{2n-1}}. \tag{26}$$

При $n = 1$ величина $\rho^2(0)$ совпадает с выражением (19). Зависимость $\rho(0)$ от относительной расстройки изображена на рис. 3 для $n = 1$, 2, 3 и 10.

КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ ШУМОВ НА ВЫХОДЕ ДВУХ УСИЛИТЕЛЕЙ С ГАУССОВЫМИ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассмотрим предельный случай, когда число каскадов $n \to \infty$. Как известно [5], при достаточно большом числе каскадов частотная характеристика резонансного усилителя, состоящего из одинаково настроенных одиночных контуров, может быть аппроксимирована выражением

$$K_1(i\omega) = e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Omega}\right)^2} e^{-it_0(\omega-\omega_0)},$$

где $t_0 = \sqrt{n \ln 2}\,/\,\Omega_n$ — время задержки; $2\Omega_n = 2\Omega\sqrt{\ln 2/2}$ — полоса пропускания на уровне 3 *дб*. Пусть второй усилитель расстроен на величину $\Delta\omega$. Тогда

$$K_2(i\omega) = e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0-\Delta\omega}{\Omega}\right)^2} e^{-it_0(\omega-\omega_0-\Delta\omega)}.$$

Будем предполагать, что на входе имеется белый шум со спектральной плотностью N_0.

Используя (2) и вводя $x = (\omega - \omega_0)/\Omega$, получим следующее выражение для корреляционной функции мгновенных напряжений шумов на выходе усилителей:

$$B_{12}(\tau) = \frac{N_0}{2\pi} e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2\Omega^2}} \int_{\frac{\omega_0}{\Omega}}^{\infty} e^{-2x^2} \cos\left(\Omega\tau x + \frac{\tau\Delta\omega}{2} + \omega_0\tau + \Delta\omega t_0\right) dx.$$

Величиной $\tau\Delta\omega/2$ можно пренебречь по сравнению с $\omega_0\tau$. Предполагая, что $\omega_0/\Omega \gg 1$, можно с достаточной точностью положить нижний предел интегрирования равным $-\infty$. После интегрирования получим

$$B(\tau) = \frac{N_0\Omega}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2 + \frac{\Omega^2\tau^2}{8}\right]} \cos(\omega_0\tau + \Delta\omega t_0),$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = B(\tau)\big|_{\substack{\Delta\omega=0\\ \tau=0}} = \frac{N_0\Omega}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Следовательно, коэффициент корреляции равен

$$R(\tau) = e^{-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2 + \frac{\Omega^2\tau^2}{8}\right]} \cos(\omega_0\tau + \Delta\omega t_0).$$

Отметим, что при $\Delta\omega = 0$ последнее выражение совпадает с известным коэффициентом корреляции для шума на выходе усилителя с гауссовой характеристикой [2]. При $\tau = 0$

$$R(0) = e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2\Omega^2}} \cos\Delta\omega t_0 =$$

$$= e^{-\ln 2\left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega_n}\right)^2} \cos\left(\sqrt{n\ln 2}\,\frac{\Delta\omega}{\Omega_n}\right). \qquad (27)$$

Покажем, что последнее выражение может быть получено из (24) предельным переходом при $n \to \infty$. Асимптотическое выражение для φ_n (см. (23)) при больших n есть $\varphi_n \simeq \sqrt{\ln 2/n}$, так как $2^{1/n} \simeq 1 + \frac{1}{n}\ln + 2 + \ldots$. Следовательно, асимптотическое выражение для $R_n(0)$ из (24) будет иметь вид

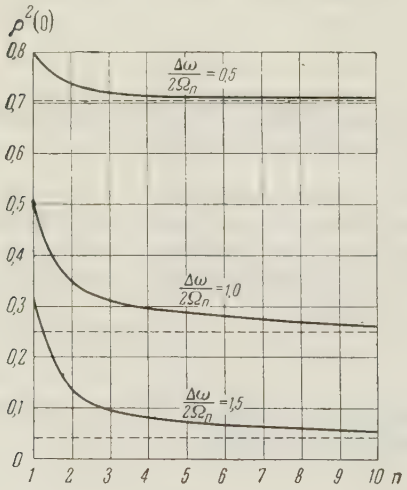


Рис. 4

$$R_n(0) \simeq \frac{\cos\left[2\sqrt{n\ln 2}\,\frac{\Delta\omega}{2\Omega_n}\right]}{\left[1 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\Omega_n}\right)^2 \frac{\ln 2}{n}\right]^n}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{-x} = e^{-\alpha},$$

получаем при $n \to \infty$ выражение (27). Таким образом, выражение (24) для $R_n(0)$ справедливо для любых n.

На рис. 2 пунктиром нанесены кривые коэффициента корреляции $R_n(0)$, подсчитанные для $n = 5$ и 10 из выражения (27). Как видно из графика, при $n = 10$ кривая практически совпадает с кривой $n = 1$, полученной из точного выражения (22) для $R_n(0)$.

Коэффициент корреляции огибающих $\rho^2(\tau)$ равен квадрату огибающей $R(\tau)$:

$$\rho^2(\tau) = e^{-\left[\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2 + \frac{\Omega^2\tau^2}{4}\right]}.$$

При $\tau = 0$

$$\rho^2(0) = e^{-\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2} = e^{-\frac{\ln 2}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega_n}\right)^2}. \qquad (28)$$

Зависимость коэффициента корреляции огибающих от расстройки, олученная из (28), приведена на рис. 3 ($n = \infty$). Нетрудно убедиться, го выражение (28) также получается предельным переходом ($n \to \infty$) з (26).

На рис. 4 представлены кривые зависимости ρ^2 (0) от числа каскадов ри расстройках $\Delta\omega/2\Omega_n = 0{,}5$; 1,0 и 1,5.

Как видно из рис. 3, величина ρ^2 (0) довольно быстро стремится к свое-у предельному значению, определяемому выражением (28) и показанному а рисунке пунктирными линиями. Так при $n = 5$ и $\Delta\omega/2\Omega_n = 0{,}5$ рас-ождение составляет 3%.

ВЫВОДЫ

Проведенный расчет показывает следующее.

1. Совместное распределение огибающих шумов на выходе двухканаль-ой системы отличается от совместного распределения огибающих на вы-оде одноканальной системы только другим значением огибающей коэф-ициента корреляции $\rho(\tau)$.

2. Для технических расчетов взаимной корреляции шумов частот-ую характеристику резонансных усилителей при числе каскадов больше ти можно аппроксимировать гауссовой кривой и линейной фазовой арактеристикой.

3. Взаимная корреляция огибающих на выходе резонансных усили-елей в совпадающие моменты времени определяется (с точностью до мно-ителя 0,92) значением квадрата (при $n = 1$) или четвертой степенью ри $n \geqslant 5$) амплитудной характеристики в точке пересечения частотных арактеристик.

ЛИТЕРАТУРА

М. В. Максимов, Взаимная корреляция флуктуационных помех на выходе частотных фильтров, Радиотехника, 1956, **11**, 9, 28.

Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Изд. Советское радио, 1957.

Е. Титчмарш, Введение в теорию интеграла Фурье, ГТИ, 1948.

В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиотехнических устройствах, Изд. Советское радио, 1951.

С. И. Евтянов, Переходные процессы в приемно-усилительных схемах, Связьиздат, 1948.

И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГТИ, 1951.

Поступила в редакцию
13 IV 1959

1960 № 4

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЖЕСТКОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А. А. Лучина

В развитие работы [1] исследуется нелинейное уравнение второго порядка автоколебательной системы в случае большой нелинейности при произвольном выборе рабочей точки. Даны условия, налагаемые на характер нелинейности, необходимые и достаточные для появления автоколебаний в жестком режиме.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Контур, регенерированный нелинейной лампой, подробно исследован и в мягком и в жестком режимах в случае, когда колебания близки по форме к синусоидальным [2, 3]. Релаксационные колебания, возникающие в мягком режиме, рассмотрены для систем с неограниченной инкрементной областью (уравнения Рэлея и Ван-дер-Поля [2,4]) и в случае, когда область нарастания колебаний ограничена на фазовой плоскости [1, 2].

В настоящей работе изучаются сильнонелинейные колебания в жестком режиме.

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(1 - \sum_{k=1}^{4} B_k \dot{x}^k\right)\dot{x} + x = 0 \qquad (1)$$

для переменной составляющей тока $I_L = x$ генератора с контуром в цепи анода (рис. 1) при большой нелинейности ($\varepsilon \to \infty$). Здесь

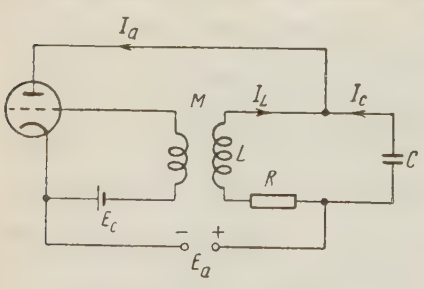


Рис. 1

$$B_k = \varepsilon^k \frac{SM^{k+1}}{(RC - MS)^{k+1}} A_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, 4; \qquad (2)$$

$$\varepsilon = \omega (RC - MS); \qquad (3)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}; \qquad (4)$$

A_k — коэффициенты полинома пятой степени аппроксимирующего характеристику лампы

$$I_a = I_{a,0} + S\left[\Delta V + \sum_{k=2}^{5} A_k (\Delta V)^k\right] = I_{a,0} + \Delta I_a, \qquad (5)$$

где ΔV — переменная составляющая управляющего напряжения, отсчитываемая от напряжения в рабочей точке:

$$\Delta V = M\omega\dot{x}. \qquad (6)$$

Подобная аппроксимация характеристики лампы является достаточно хорошим приближением при выборе рабочей точки на любом участке характеристики. Дифференцирование ведется по безразмерному времени $\tau = \omega t$.

В случае $RC - MS > 0$ $\varepsilon > 0$ и положение равновесия устойчиво. Для ределенного типа характеристик ламп при соответствующем выборе бочей точки и при достаточно большом начальном возмущении могут зникнуть автоколебания в жестком режиме. Исследуем с этой точки ения уравнение (1) путем построения фазового портрета системы при мощи «метода малого параметра», разработанного Тихоновым и исполь емого в [1].

2. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ СИСТЕМЫ

На фазовой плоскости (x, $z = \dot{x}/\sqrt{\mu}$) интегральные кривые уравнения удовлетворяют следующему уравнению:

$$\mu \frac{dz}{dx} = -\left(1 - \sum_{k=1}^{4} K_k z^k\right) - \frac{x}{z}, \tag{7}$$

$$K_k = \mu^{k/2} B_k; \tag{8}$$

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon^2} \tag{9}$$

и $\varepsilon \to \infty$, $\mu \to 0$).

Согласно [5] (7) относится к типу уравнений, поведение решений орых при $\mu \to 0$ определяется ходом кривой изоклины горизонталь х касательных к интегральным кривым невырожденного уравнения. лагая в (7) $dz/dx = 0$, получим уравнение изоклины

$$x = -\left(z - \sum_{k=1}^{4} K_k z^{k+1}\right). \tag{10}$$

бор переменной z обусловлен тем, что на соответствующей фазовой оскости положение изоклины не изменяется при $C \to 0$ (при этом $\mu \to 0$). (10) видно, что изоклина пересекает начало координат, проходя по рому и четвертому квадрантам. При $z \to \infty$ ветви изоклины уходят есконечность, оставаясь во втором и четвертом квадрантах соответ енно. Поведение изоклины при конечных значениях z зависит от числа ней уравнения

$$1 - \sum_{k=1}^{4} K_k z^k = 0, \tag{11}$$

еделяющего ординаты точек, в которых изоклина пересекает ось z, лючая точку $z = 0$.

При $\mu \to 0$ на всей фазовой плоскости, за исключением точек изо ны, $dz/dx \to \pm\infty$. Таким образом, вне изоклины интегральные кри уравнения (7) идут почти по вертикальным прямым, приближаясь остом t к устойчивым ветвям изоклины, на которых $\partial f/\partial z < 0$ в верх полуплоскости и $\partial f/\partial z > 0$ в нижней полуплоскости (см. [1]), и уда ись от неустойчивых ее участков, на которых $\partial f/\partial z > 0$ в верхней полу оскости и $\partial f/\partial z < 0$ в нижней полуплоскости $\left(f = -\left(1 - \sum_{k=1}^{4} K_k z^k\right) - \frac{x}{z}\right)$.

Рассмотрение фазового портрета системы таким путем приводит к вы у, что предельные циклы, а следовательно, и автоколебания, возмож лишь в случае четырех различных действительных корней $z_{2,3}$, $z_{4,5}$ внения (11). В остальных случаях система не возбуждается ни при ом начальном возмущении. Первый случай осуществляется при вы-

полнении условий

$$X_2 < X < X_1, \tag{1}$$

$$b - \frac{a^2}{4} < X < \frac{a^2}{2} - b, \tag{1}$$

$$X^2 > 4d, \tag{1}$$

$$b < \frac{3}{8}a^2 - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{9}b^2 - \frac{4}{3}ac + \frac{16}{3}d}\,, \tag{1}$$

где

$$X_{1,2} = \frac{b}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}b^2 - \frac{4}{3}ac + \frac{16}{3}d} \tag{1}$$

и X является решением вспомогательного уравнения

$$X^3 - bX^2 + (ac - 4d)X - [d(a^2 - 4b) + c^2] = 0, \tag{1}$$

в котором

$$a = \frac{K_3}{K_1}\,, \quad b = \frac{K_2}{K_4}\,, \quad c = \frac{K_1}{K_4}\,, \quad d = -\frac{1}{K_4}\,. \tag{1}$$

При соблюдении приведенных выше условий фазовый портрет систем имеет предельные циклы, если две точки пересечения изоклины с ось z имеют положительные ординаты, а две — отрицательные, т. е. реали зуется один из четырех случаев:

$$1)\ \begin{cases} \frac{a}{2} + A > 0, \ \frac{X}{2} + B > 0, \\ \frac{a}{2} - A < 0, \ \frac{X}{2} - B > 0, \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \frac{a}{2} + A < 0, \ \frac{X}{2} + B < 0, \\ \frac{a}{2} - A > 0, \ \frac{X}{2} - B < 0, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \frac{a}{2} + A < 0, \ \frac{X}{2} + B < 0, \\ \frac{a}{2} - A > 0, \ \frac{X}{2} - B < 0, \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} \frac{a}{2} + A > 0, \ \frac{X}{2} + B < 0, \\ \frac{a}{2} - A > 0, \ \frac{X}{2} - B < 0, \end{cases}$$

где

$$A = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + X}; \qquad B^2 = \frac{X^2}{4} - d, \tag{1}$$

причем

$$x_{\text{макс}}(z > 0) > x_{\text{макс}}(z < 0), \ x_{\text{мин}}(z > 0) > x_{\text{мин}}(z < 0).$$

Соответствующая изоклина горизонтальных касательных изображен на рис. 2. Стрелками показано направление dz/dt вдали от изоклины различных областях фазового пространства, на которые изоклина дели фазовую плоскость. Устойчивые ветви изоклины показаны жирным сплошными линиями, неустойчивые — пунктирными, тонкими линиям представлены интегральные кривые вблизи изоклины.

На рис. 3 представлены соответствующие интегральные кривые (то кие линии) и предельные циклы (жирные линии); цикл с меньшей амплит дой неустойчив, с большей — устойчив. Направление движения изобр

ющей точки по интегральным кривым показано стрелками. Изоклина ображена пунктиром. При $\mu \to 0$ «пределы предельных циклов» (см. [4]) еют вид, представленный на рис. 4.

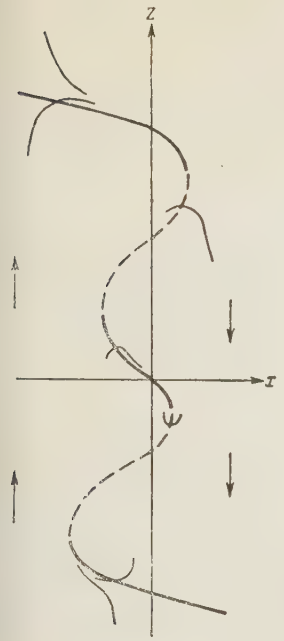


Рис. 2

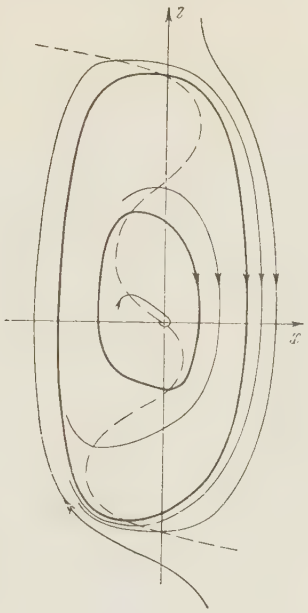


Рис. 3

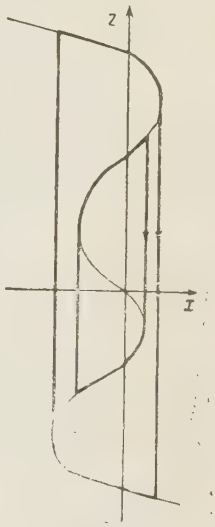


Рис. 4

Устойчивый предельный цикл соответствует пилообразным колеба-им. Колебания на рис. 5 построены по устойчивому циклу рис. 4. Согласно рис. 3 автоколебания возбуждаются, если изображающая ка движется из области фазового пространства, простирающейся в

Рис. 5

конечность и не включающей часть фазового пространства, заключен-о внутри неустойчивого предельного цикла. Движение изображающей ки внутри предельного цикла с меньшей амплитудой соответствует еходу системы в состояние равновесия.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ИЗОКЛИНЫ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ

Условия (12) и последующие налагают определенные ограничения на статической характеристики лампы. Чтобы выявить форму харак-истики, для которой возможен жесткий режим автоколебаний, вос-льзуемся геометрическим построением изоклины по заданной характе-стике, не прибегая к ее аппроксимации в аналитическом виде.

Уравнение, приведенное к безразмерному времени, для переменной составляющей тока x через катушку системы, изображенной на рис. 1, можно записать в виде

$$\ddot{x} + \left[\frac{2\delta}{\omega} - \frac{\Delta I_a(M\omega\dot{x})}{\dot{x}}\right]\dot{x} + x = 0, \qquad (20$$

где

$$\delta = \frac{R}{2L}. \qquad (21$$

На фазовой плоскости $(x, z = \omega\dot{x})$ интегральные кривые удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{dz}{dx} = -\left[\frac{2\delta}{\omega^2} - \frac{\Delta I_a(Mz)}{z}\right] - \frac{x}{z}, \qquad (22$$

$1/\omega^2$ — малый параметр, пропорциональный μ с точностью до множителя $1/(RC - MS)^2$. Полагая в (22) $dz/dx = 0$, получим уравнение изоклины горизонтальных касательных, определяющей характер решений невырожденного уравнения (22)

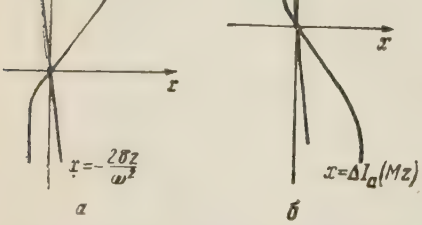


Рис. 6

$$x = -\frac{2\delta}{\omega^2}z + \Delta I_a(Mz). \qquad (23$$

Геометрическое построение изоклины по (23) не представляет труда, если известен график характеристики $I_a(V)$. При $z \to$ $\Delta I_a \to SMz$. Представляя (23) в виде

$$x = -(RC - MS)z + [\Delta I_a(Mz) - SMz], \qquad (2$$

убеждаемся, что поведение изоклины при малых z определяется первым членом соотношения (24). Так как $RC - MS > 0$, то через начало координат изоклина проходит по второму и четвертому квадрантам. На рис. 6 представлены графики функций $x = -2\delta z/\omega^2$ и $x = \Delta I_a(M$

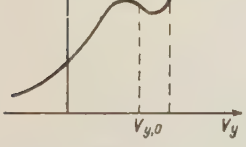


Рис. 7

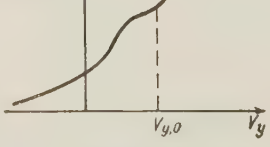


Рис. 8

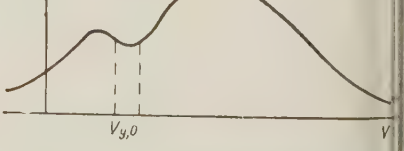


Рис. 9

соответствующих обычному виду характеристики одной лампы, для случаев $M > 0$ (*а*) и $M < 0$ (*б*). Очевидно, для выбранного вида характеристики автоколебания не возбуждаются ни при каком начальном возмущении. Для того чтобы получить вид изоклины, обеспечивающий наличие автоколебаний (см. рис. 2), необходимо, чтобы при дальнейшем увеличении z она из второго и четвертого квадрантов попадала в первый и третий квадранты соответственно. Для этого, в случае $M > 0$, крутизна характеристики должна достаточно нарастать справа и слева от рабочей точки

* Аналогичное условие имеется в случае автоколебаний жесткой системы, близкой по форме к синусоидальным [2, 3, 6].

м. рис. 7). Рабочая точка может быть и во впадине с $S \leqslant 0$ (см. рис. 8), о участки характеристики с положительной крутизной справа и сле- а от рабочей точки должны быть достаточно крутыми. Для $M<0$ необхо- имо наличие падающего участка характеристики при больших z и суще- твование двух максимумов характеристики с достаточным нарастанием о модулю отрицательной крутизны справа и слева от рабочей точки (см. ис. 9).

Аналогичным образом можно показать, что в случае $RC-MS<0$ систе- а самовозбуждается и имеет один предельный цикл при выборе рабочей очки на любом участке характеристики.

Таким образом показано, что при достаточно большом начальном воз- ущении в жесткой нелинейной системе возникают автоколебания одной пределенной амплитуды при соответствующем выборе рабочей точки для екоторого вида характеристик ламп.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность К. Ф. Теодор- ику за проявленный интерес и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

А. А. Л у ч и н а, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 440.
К. Ф. Т е о д о р ч и к, Автоколебательные системы, ГИТТЛ, 1952.
Е. С е к е р с к а я, ЖТФ, 1935, 5, 2, 253.
Дж. С т о к е р, Нелинейные колебания в механических и электрических систе- мах, ИЛ, 1952.
А. Н. Т и х о н о в, О зависимости решений дифференциальных уравнений от ма- лого параметра, Матем. сб., 1948, 22, 2, 193.
А. А. А н д р о н о в, С. Э. Х а й к и н, Теория колебаний, НКТП СССР, 1937.

Физический факультет
осковского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
Кафедра теории колебаний

Поступила в редакцию
14 V 1959

1960 № 4

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФАЗЫ КОЛЕБАНИЙ ЛАМПОВОГО АВТОГЕНЕРАТОРА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ ЭДС

А. Н. Шустерович

Дается приближенное решение уравнения фазы колебаний автогенератора для установившегося режима в области захватывания при воздействии на генератор малой внешней эдс. Получены выражения, определяющие фазы колебаний автогенератора при амплитудной, частотной и амплитудно-частотной модуляциях внешней эдс (при медленном изменении модулирующей функции).

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], фаза колебаний лампового автогенератора томсоновского типа, находящегося под воздействием малой внешней эдс, описывается укороченным дифференциальным уравнением

$$\varphi' + \alpha \sin \varphi = \Delta, \tag{1}$$

где $\alpha = E\omega_0/2A_0$ — полоса захватывания автогенератора; A_0 и φ — амплитуда и фаза автоколебаний; $\Delta = \omega_0 - p$ — расстройка; E и p — амплитуда и частота внешней эдс; ω_0 — частота автоколебаний.

Если α и Δ являются медленными функциями времени, то укороченное уравнение (1) имеет тот же вид [2].

В общем случае нелинейное уравнение (1) не интегрируется.

В ряде работ приводятся решения уравнения (1) для некоторых частных случаев; например, решение (1) при постоянных α и Δ дано в работе Р. В. Хохлова [1].

Во многих работах, например [3, 4], рассматривается случай малых расстроек внешней эдс, когда нелинейное уравнение (1) можно заменить упрощенным

$$\varphi' + \alpha\varphi = \Delta. \tag{2}$$

Однако также может представить интерес приближенное решение уравнения (1) в некоторой области расстроек с учетом нелинейности уравнения.

Ниже рассматривается метод приближенного решения нелинейного уравнения (1) для генератора, работающего в установившемся режиме при следующих условиях.

1. В любой момент времени выполняется известное условие захватывания автогенератора:

$$\frac{\Delta}{\alpha} < 1,$$

где Δ/α — относительная расстройка.

2. Спектр малой модулированной внешней эдс значительно у́же полосы захватывания автогенератора.

Это условие можно выразить также в форме, более удобной для дальнейшего изложения, а именно: полоса захватывания α и расстройка Δ автогенератора изменяются при воздействии модулированной внешней эдс настолько медленно, что все их производные, отнесенные к полосе

хватывания, значительно меньше этой полосы. Последнее условие запишем в следующем виде:

$$\frac{\left(\frac{\alpha^{(n)}}{\alpha^n}\right)}{\alpha} \ll 1, \qquad \frac{\left(\frac{\Delta^{(n)}}{\alpha^n}\right)}{\alpha} \ll 1, \tag{3}$$

и $n = 1,2,3...$

Выражения, стоящие в левых частях неравенства (3), назовем относительными производными n-го порядка соответственно для полосы хватывания и расстройки.

1. МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1) ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА

Пусть дано уравнение фазы автоколебаний (1). Поскольку по условию α и Δ являются медленными функциями времени, то такой же функцией можно также полагать и фазу автоколебаний, а величину производной фазы в уравнении (1) считать малой по сравнению с другими членами равнения.

Примем поэтому в качестве первого приближения для фазы автоколебаний φ_1 выражение

$$\alpha \sin \varphi_1 = \Delta, \quad \varphi' \simeq 0. \tag{4}$$

Найденное приближение является грубым, так как оно не учитывает начение производной φ'. Однако выражение (4) позволяет определить иближенное значение производной φ_1'. Действительно, дифференцируя (4), найдем

$$\varphi_1' = \frac{\left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)'}{\cos \varphi_1}, \quad \cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)^2}. \tag{5}$$

Теперь можно получить более близкое, второе приближение для фазы токолебаний φ_2 с учетом приближенного значения производной φ_1'. Подставляя выражения (5) в (1), получим уравнение для второго приближения:

$$\varphi_1' + \alpha \sin \varphi_2 = \Delta \text{ или } \sin \varphi_2 = \frac{1}{\alpha}\left[\Delta - \frac{\left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)'}{\cos \varphi_1}\right]. \tag{6}$$

Второе приближение для производной φ_2' найдем, дифференцируя равнение (6):

$$\varphi_2' = \frac{\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\Delta - \frac{\left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)'}{\cos \varphi_1}\right]\right\}'}{\cos \varphi_2}. \tag{7}$$

Подставляя уравнение (7) в (1), определим выражение для третьего иближения фазы автоколебаний:

$$\varphi_2' + \alpha \sin \varphi_3 = \Delta. \tag{8}$$

Выполняя последовательно указанные операции, можно найти все бо-е близкие приближения для фазы автоколебаний и ее производной.

2. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФАЗЫ КОЛЕБАНИЙ АВТОГЕНЕРАТОРА

Выполняя операции дифференцирования в выражениях (5) и (7) и учитывая уравнения (4), (6) и (8), получим

$$\sin\varphi_1 = \frac{\Delta}{\alpha},$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{\Delta}{\alpha} - \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta'}{\alpha}\right)}{\cos\varphi_1} + \frac{\frac{\Delta}{\alpha}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)}{\cos\varphi_1},$$

$$\sin\varphi_3 = \left[\frac{\Delta}{\alpha} - \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta'}{\alpha}\right)}{\cos\varphi_2} + \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta''}{\alpha^2}\right)}{\cos\varphi_2\cos\varphi_1}\right] +$$

$$+ \frac{\Delta}{\alpha}\left[\frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)}{\cos\varphi_2} - \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha''}{\alpha^2}\right)}{\cos\varphi_2\cos\varphi_1}\right] +$$

$$+ \left[\frac{2\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta'}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) + 3\frac{\Delta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2}{\cos\varphi_2\cos\varphi_1}\right] + \quad (9$$

$$+ \left[\frac{\frac{\Delta}{\alpha}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta'}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) + \left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)^3\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta'}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)^2\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta'}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)}{\cos\varphi_2\cos^3\varphi_1}\right].$$

Анализ структуры формул (9) позволяет написать выражение для $(n+1)$-го приближения:

$$\sin\varphi_{(n+1)} = \left[\frac{\Delta}{\alpha} - \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta'}{\alpha}\right)}{\cos\varphi_n} + \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\Delta''}{\alpha^2}\right)}{\cos\varphi_n\cos\varphi_{(n-1)}} + \frac{(-1)^n\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta^{(n)}}{\alpha^n}}{\prod_{k=1}^{k=n}\cos\varphi_k}\right] +$$

$$+ \frac{\Delta}{\alpha}\left[\frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)}{\cos\varphi_n} - \frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha''}{\alpha^2}\right)}{\cos\varphi_n\cos\varphi_{(n-1)}} + \ldots \frac{(-1)^{(n+1)}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^{(n)}}{\alpha^n}\right)}{\prod_{k=1}^{k=n}\cos\varphi_k}\right] + \Phi, \quad (10$$

где $n = 1,2,3\ldots$; Φ — сумма слагаемых, числитель которых представляет собой произведение степеней относительных производных и относительной расстройки, а знаменатель — произведение степеней косинусов всех приближений от первого до n-го.

Выражение (10) значительно упрощается, если функции Δ и α медленно изменяются во времени так, что выполняются условия (3).

В самом деле, если относительная расстройка Δ/α не очень велика и следовательно, значения косинусов далеки от нуля, то, согласно условию (3), слагаемые суммы Φ являются малыми высокого порядка и суммой Φ можно пренебречь. Полагая далее, что при условии (3) различные приближения мало отличаются друг от друга, можно принять

$$\cos\varphi_n \simeq \cos\varphi_{(n-1)} \simeq \ldots \simeq \cos\varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{\alpha^2}}.$$

Преобразуя формулу (10) в соответствии с принятыми допущениями, получим упрощенное выражение для фазы автоколебаний в виде суммы

есконечных рядов:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\alpha}\left(\Delta - \frac{\Delta'}{\alpha}N + \frac{\Delta''}{\alpha^2}N^2 - \frac{\Delta'''}{\alpha^3}N^3 + \ldots\right) + \\ + \frac{\Delta}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}N - \frac{\alpha''}{\alpha^2}N^2 + \frac{\alpha'''}{\alpha^3}N^3 - \frac{\alpha^{IV}}{\alpha^4}N^4 + \ldots\right), \qquad (11)$$

де

$$N = \frac{1}{\cos\varphi_1} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\Delta^2}{\alpha^2}}},$$

В некоторых случаях выражение (11), как показано ниже, позволяет айти точное выражение для фазы автоколебаний в установившемся ре- име.

Отметим, что формула (10) является более точной, чем (11).

Рассмотрим применение выражения (11) при различных видах моду- яции внешнего сигнала. Одновременно покажем справедливость полу- енных результатов путем их сравнения с результатами точного и числен- ого интегрирований уравнения (1).

3. ВНЕШНЯЯ ЭДС МОДУЛИРОВАНА ПО ЧАСТОТЕ

В этом случае в уравнении (11) следует положить

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \quad \alpha' = \alpha'' = \ldots = \alpha^{(n)} = 0.$$

Тогда выражение (11) принимает вид

$$\sin\varphi = \frac{1}{\alpha_0}\left(\Delta - \frac{\Delta'}{\alpha_0}N_1 + \frac{\Delta''}{\alpha_0^2}N_1^2 - \frac{\Delta'''}{\alpha_0^3}N_1^3 + \ldots\right), \qquad (12)$$

де

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\Delta^2}{\alpha_0^2}}}.$$

Если расстройка Δ изменяется по гармоническому закону

$$\Delta = \Delta_0 \cos\Omega_1 t, \qquad (13)$$

)

$$\sin\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\left(1 - \frac{\Omega_1^2 N_1^2}{\alpha_0^2} + \frac{\Omega_1^4 N_1^4}{\alpha_0^4} - \frac{\Omega^6 N_1^6}{\alpha_0^6} + \ldots\right)\left(\cos\Omega_1 t + \frac{\Omega_1 N_1}{\alpha_0}\sin\Omega_1 t\right). \qquad (14)$$

Заменяя ряд в скобках его пределом $\dfrac{1}{1+\dfrac{\Omega_1^2 N_1^2}{\alpha_0^2}}$,

олучим

$$\sin\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\,\frac{\cos\Omega_1 t + \frac{\Omega_1 N_1}{\alpha_0}\sin\Omega_1 t}{1+\frac{\Omega_1^2 N_1^2}{\alpha_0^2}}, \qquad (15)$$

ткуда

$$\sin\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\,\frac{\cos(\Omega_1 t - \theta_1)}{\sqrt{1+\frac{\Omega_1^2 N_1^2}{\alpha_0^2}}}, \qquad (16)$$

где

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\Omega_1 N_1}{\alpha_0}, \qquad N_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Delta_0}{\alpha_0}\right)^2 \cos^2 \Omega_1 t}}.$$

В случае малой расстройки $\Delta_0 / \alpha_0 \ll 1$, $N_1 \simeq 1$, $\sin\varphi \simeq \varphi$.

Выражение для фазы автоколебаний в этом случае легко получить из уравнения (15):

$$\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0} \frac{\cos \Omega_1 t + \frac{\Omega_1}{\alpha_0} \sin \Omega_1 t}{1 + \frac{\Omega_1^2}{\alpha_0^2}}. \tag{17}$$

Формула (17) может быть выведена при интегрировании обычным методом уравнения (2) для установившегося режима.

Формула (16) для случая больших расстроек была проверена путем сравнения с результатами численного интегрирования (1) по методу Адамса. Одновременно было определено третье приближение для фазы колебаний автогенератора, которое в соответствии с выражением (9) может быть представлено в виде

$$\sin\varphi_3 = r\left[\cos\Omega_1 t + q\frac{\sin\Omega_1 t}{\cos\varphi_2} - q^2\frac{\cos\Omega_1 t}{\cos\varphi_2\cos\varphi_1} + \frac{q^2 r^2}{2}\frac{\sin\Omega_1 t \sin 2\Omega_1 t}{\cos\varphi_2\cos^3\varphi_1}\right], \tag{18}$$

где

$$r = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}, \quad q = \frac{\Omega_1}{\alpha_0},$$

$$\cos\varphi_1 = \sqrt{1 - r^2\cos\Omega_1 t},$$

$$\cos\varphi_2 = \sqrt{1 - r^2\left(\cos\Omega_1 t + q\frac{\sin\Omega_1 t}{\sqrt{1-r^2\cos^2\Omega_1 t}}\right)^2}.$$

Для расчета были выбраны следующие значения коэффициентов: $r = 0{,}6$, $q = 0{,}1$.

Исследовался участок кривой $\varphi = f(\Omega_1 t)$ с большой и малой крутизнами. Результаты численного интегрирования уравнения (1) и расчетов по формулам (16) и (18) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Способ вычисления φ	$\Omega_1 t$								
	* 0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°
По Адамсу	36°12′	36°29,03′	35°28,1′	33°13,5′	29°52,3′	25°36,3′	20°38,2′	15°10,2′	12°18,4′
По формуле (16)	*36°12′	36°30′	35°32′	33°15,4′	29°55′	25°40′	20°40′	15°12′	12°21,3′
По формуле (18)	36°12,5′	36°30,5′	35°27′,9′	33°10′	29°46′	25°30′	20°32,2′	15°03,3′	12°13,9′

В качестве начальных условий для численного интегрирования были взяты данные, отмеченные в табл. 1 звездочками.

Анализ данных, приведенных в табл. 1, показывает, что результаты приближенного и численного интегрирований (1) практически совпадают (максимальная ошибка не превосходит 6 *мин*).

Выразим приближенно фазу автоколебаний в явном виде.

Из уравнений (1) и (15) с учетом условия (13) следует

$$\varphi' = \Delta_0 \left[\cos \Omega_1 t - \frac{\cos \Omega_1 t + \frac{\Omega_1 N_1}{\alpha_0} \sin \Omega_1 t}{1 + \frac{\Omega_1^2 N_1^2}{\alpha_0^2}} \right], \tag{19}$$

де

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_0}{\alpha_0}\right)^2 \cos^2 \Omega_1 t}}.$$

Раскладывая N_1 в ряд по степеням $\cos^2 \Omega_1 t$ и производя преобразования, можно выражение (19) привести к виду

$$\varphi' = \sum_{k=0}^{k=\infty} Q_k(r, q) \sin [(2k+1)\Omega_1 t - \xi_k(r, q)], \quad k = 0, 1, 2, 3\ldots . \tag{20}$$

Интегрируя (20), получим приближенное выражение для фазы автоколебаний:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{k=0}^{k=\infty} R_k(r, q) \cos [(2k+1)\Omega_1 t - \nu_k(r, q)], \tag{21}$$

где φ_0 — постоянная интегрирования (постоянная расстройка); r и q — относительные расстройка и частота модуляции.

При гармоническом законе изменения расстройки (13) постоянная составляющая фазы отсутствует: $\varphi_0 = 0$.

Из выражения (21) следует, что при частотной модуляции вида (13) фаза колебаний автогенератора имеет лишь нечетные гармоники частоты модулирующей функции. Коэффициенты ряда (21) зависят от относительной расстройки и относительной частоты модуляции. При малых r и q ряд (21) быстро сходится.

4. ВНЕШНЯЯ ЭДС МОДУЛИРОВАНА ПО АМПЛИТУДЕ

В этом случае в уравнении (11) следует положить

$$\Delta = \Delta_0 = \text{const}, \quad \Delta' = \Delta'' = \Delta^{(n)} = 0.$$

Тогда это уравнение принимает вид

$$\sin \varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha' N_2}{\alpha^2} - \frac{\alpha'' N_2^2}{\alpha^3} + \frac{\alpha''' N_2^3}{\alpha^4} - \frac{\alpha^{\mathrm{IV}} N_2^4}{\alpha^5} + \ldots\right), \tag{22}$$

где

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_0^2}{\alpha^2}}}.$$

Рассмотрим случай, когда глубина амплитудной модуляции мала. Пусть

$$\alpha = \alpha_0 (1 + mZ), \tag{23}$$

где $m \ll 1$; Z — медленная функция времени; $\alpha_0 = E_0 \omega_0 / 2A_0$; E_0 — амплитуда сигнала несущей частоты.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{(n)} &= m\alpha_0 Z^{(n)}; \\ \frac{1}{\alpha_0 (1 + mZ) u} &\simeq \frac{1}{\alpha_0} (1 - umZ) \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

Подставляя уравнения (24) в (22) и пренебрегая членами, имеющими

порядок малости m^2 и выше, получим

$$\sin\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\left[1 - m\left(Z - \frac{Z'N_2}{\alpha_0} + \frac{Z''N_2^2}{\alpha_0^2} - \frac{Z'''N_2^3}{\alpha_0^3} + \ldots\right)\right], \qquad (25)$$

$$N_2 \simeq \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Delta_0}{\alpha_0}\right)^2}}.$$

Если модулирующая функция Z является гармонической:

$$Z = \cos\Omega_2 t, \qquad (26)$$

то

$$\sin\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\left[1 - m\left(1 - \frac{\Omega_2^2N_2^2}{\alpha_0^2} + \frac{\Omega_2^4N_2^4}{\alpha_0^4} - \frac{\Omega_2^6N_2^6}{\alpha_0^6} + \ldots\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\cos\Omega_2 t + \frac{\Omega_2 N_2}{\alpha_0}\sin\Omega_2 t\right)\right].$$

Заменяя выражение для ряда его пределом $\dfrac{1}{1+\dfrac{\Omega_2^2N_2^2}{\alpha_0^2}}$, получим

$$\sin\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\left[1 - \frac{m}{1+\dfrac{\Omega_2^2N_2^2}{\alpha_0^2}}\left(\cos\Omega_2 t + \frac{\Omega_2 N_2}{\alpha_0}\sin\Omega_2 t\right)\right]. \qquad (27)$$

Для случая малых расстроек, когда

$$\frac{\Delta_0}{\alpha_0} \ll 1, \quad N_2 \simeq 1, \quad \sin\varphi \simeq \varphi,$$

уравнение для фазы автоколебаний принимает вид

$$\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\left[1 - \frac{m}{1+\dfrac{\Omega_2^2}{\alpha_0^2}}\left(\cos\Omega_2 t + \frac{\Omega_2}{\alpha_0}\sin\Omega_2 t\right)\right]. \qquad (28)$$

Выражение (28) совпадает с результатом интегрирования уравнения $\varphi' + \alpha_0(1 + m\cos\Omega_2 t)\,\varphi = \Delta$ для случая малого коэффициента модуляции, полученным весьма сложным путем в работе Д. П. Мартыненко и Р. В. Хохлова [3].

Формула (27) для случая больших расстроек была проверена путем сравнения с результатом численного интегрирования уравнения (1) по методу Адамса.

Для расчета были выбраны следующие значения коэффициентов:

$$\Delta_0/\alpha_0 = 0{,}6, \quad m = 0{,}1, \quad \Omega_2/\alpha_0 = 0{,}3.$$

Результаты численного интегрирования (1) и расчетов по формуле (27) представлены в табл. 2.

В качестве начальных условий для численного интегрирования были взяты данные, отмеченные в таблице звездочками.

Таблица 2

Способ вычисления φ	$\Omega_2 t$								
	*180°	192°	201°	210°	222°	234°	246°	258°	267°
По Адамсу	40°44,5′	41°07,7′	41°17,5′	41°16,5′	41°03,9′	40°37,6′	40°01,3′	39°16,5′	38°39,6′
По формуле (27)	*40°44,5′	40°58,2′	41°00′	40°57,3′	40°42,7′	40°18,6′	39°43,9′	39°04,3′	38,30′

Из табл. 2 следует, что результаты, полученные методом численного и приближенного интегрирований, для рассматриваемого случая близко совпадают. Максимальное расхождение результатов не превосходит 21,2 мин. Уравнение (27) можно представить также в виде

$$\sin\varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\left[1 - \frac{m\cos(\Omega_2 t - \theta_2)}{\sqrt{1 + \dfrac{\Omega_2^2}{\alpha_0^2\left(1 - \dfrac{\Delta_0^2}{\alpha_0^2}\right)}}}\right], \tag{29}$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\Omega_2}{\alpha_0\sqrt{1 - \dfrac{\Delta_0^2}{\alpha_0^2}}}.$$

Выразим приближенно фазу автоколебаний в явном виде. Из уравнений (1) и (29) с учетом условий (23) и (26) следует

$$\varphi' = \Delta_0 - \alpha_0(1 + m\cos\Omega_2 t)\frac{\Delta_0}{\alpha_0}\left[1 - \frac{m\cos(\Omega_2 t - \theta_2)}{\sqrt{1 + \dfrac{\Omega_2^2}{\alpha_0^2\left(1 - \dfrac{\Delta_0^2}{\alpha_0^2}\right)}}}\right]. \tag{30}$$

Производя преобразование выражения (30) и пренебрегая членами, содержащими m^2, получим

$$\varphi' = -\Delta_0 m\left[\cos\Omega_2 t - \frac{\cos(\Omega_2 t - \theta_2)}{\sqrt{1 + \dfrac{\Omega_2^2}{\alpha_0^2\left(1 - \dfrac{\Delta_0^2}{\alpha_0^2}\right)}}}\right]. \tag{31}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, можно привести к виду

$$\frac{q}{\sqrt{1 - r^2 + q^2}}\cos\left[\Omega_2 t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1 - r^2}}{q}\right)\right], \tag{32}$$

$q = \Omega_2/\alpha_0$ — относительная частота модуляции; $r = \Delta_0/\alpha_0$ — относительная расстройка.

Подставив выражение (32) в формулу (31), получим

$$\varphi' = \frac{-\Delta_0 m \cdot q\cos\left[\Omega_2 t + \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\sqrt{1 - r^2}}{q}\right)\right]}{\sqrt{1 - r^2 + q^2}}. \tag{33}$$

Интегрируя (33), найдем выражение для фазы колебаний автогенератора в явном виде:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\Delta_0}{\Omega_2} m\frac{q}{\sqrt{1 - r^2 + q^2}}\sin\left[\Omega_2 t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1 - r^2}}{q}\right)\right], \tag{34}$$

φ_0 — постоянная интегрирования, которая легко определяется из условия: $\varphi_0 = \varphi$ при $m = 0$. Так как в отсутствие модуляции внешней силы для установившегося режима $\varphi' = 0$, то из уравнений (1) и (23) следует, что

$$\sin\varphi_0 = \frac{\Delta_0}{\alpha_0} = r, \qquad \varphi_0 = \arcsin r.$$

Замечая далее, что

$$\frac{\Delta_0}{\Omega_2} = \frac{\Delta_0}{\alpha_0} \quad \frac{\alpha_0}{\Omega_2} = \frac{r}{q},$$

перепишем выражение (34) в виде

$$\varphi = \arcsin r - \frac{mr}{\sqrt{1 - r^2 + q^2}} \sin\left[\Omega_2 t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{q}\right)\right]. \qquad (35$$

Из уравнения (35) следует, что фаза колебаний автогенератора имеет пульсирующий характер. Переменная составляющая изменяется по гармоническому закону со сдвигом фазы по отношению к модулирующей функции $Z = \cos \Omega_2 t$. Сдвиг фазы зависит от относительной расстройки $r = \Delta_0/\alpha_0$ и относительной частоты модуляции $q = \Omega_2/\alpha_0$ и не зависит от коэффициента модуляции.

Амплитуда пульсирующей части фазы колебаний автогенератора пропорциональна коэффициенту модуляции и зависит от относительной расстройки и частоты модуляции r и q.

Амплитуда пульсирующей части имеет максимум при

$$r_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{1+q^2}{2}}.$$

Так как вывод формулы (35) справедлив при малых q, то

$$r_{\text{макс}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0{,}707.$$

5. ВНЕШНЯЯ ЭДС МОДУЛИРОВАНА ПО АМПЛИТУДЕ И ЧАСТОТЕ

Фаза автоколебаний в рассматриваемом случае определяется формулой (11).

Если расстройка Δ и полоса захватывания α изменяются по законам

$$\Delta = \Delta_0 \cos \Omega_1 t,$$
$$\alpha = \alpha_0 (1 + m \cos \Omega_2 t), \quad m \ll 1,$$

причем α и Δ удовлетворяют условиям (3), то можно путем преобразований, аналогичных преобразованиям в § 3 и 4, и пренебрегая членами, содержащими выражения $m\,\Omega_1/\alpha$ и $m\Omega_2/\alpha$, привести уравнение (11) к виду

$$\sin \varphi = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}\left[\frac{\cos(\Omega_1 t - \theta_1)}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_1^2 N_1^2}{\alpha_0^2}}} - \frac{m \cos(\Omega_2 t - \theta_2)}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_2^2 N_1^2}{\alpha_0^2}}} \cos \Omega_1 t\right], \qquad (36$$

где

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_0^2}{\alpha_0^2} \cos^2 \Omega_1 t}};$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\Omega_1 N_1}{\alpha_0}; \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\Omega_2 N_1}{\alpha_0}.$$

Анализ формулы (36) показывает, что частотный спектр фазы колебаний автогенератора содержит частоты $(2k+1)\,\Omega_1$, комбинационные частоты типа $(2k+1)\,\Omega_1 \pm \Omega_2$ и не содержит частоты Ω_2 и ее гармоник.

ВЫВОДЫ

1. Предлагаемый метод приближенного интегрирования нелинейного авнения (1) для установившегося режима в рассмотренных частных учаях дает достаточно точные результаты. Приближения оказываются точнее, чем медленнее изменяются модулирующие функции и чем ньше расстройка внешней эдс.

2. Приближенный метод интегрирования позволяет сравнительно осто получить уравнения, определяющие фазу колебаний автогенегора при некоторых видах модуляции внешнего сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

Р. В. Хохлов, Докл. АН СССР, 1954, 43, 3, 41.
Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, 1955.
Д. П. Мартыненко, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 8, 1001.
Э. С. Воронин, Радиотехника, 1959, 14, 2, 48.

Поступила в редакцию
11 IV 1959

1960 № 4

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ УКВ

Г. А. Карпеев, А. А. Семенов

Произведена теоретическая оценка вариаций амплитуды выходного напряжения квадратичного детектора, на вход которого подан сигнал от антенной системы, состоящей из двух приемных элементов и работающей по методу разности полей.

Показано, что если сигнал на входе антенной системы может быть представлен как сумма случайной и регулярной компонент поля, вариации напряжения на выходе системы будут определяться амплитудно-фазовыми вариациями поля на ее входе и зависят от регулярной компоненты поля и базы разноса.

ВВЕДЕНИЕ

При экспериментальном исследовании флуктуаций УКВ на приземных трассах в зоне прямой видимости возникает ряд трудностей, связанных с относительной малостью этих флуктуаций, приводящей к необходимости разработки специальных методов теоретической оценки флуктуаций [1] и созданию довольно громоздкой аппаратуры для их исследования [2].

С другой стороны, по аналогии с измерениями в регулярном поле, делались попытки применения интерференционного метода для измерения флуктуаций УКВ. При этом результаты измерений трактуются как флуктуации фазы волны [3].

Однако такая интерпретация результатов интерференционного метода измерений заранее не очевидна и, как будет показано ниже, за исключением некоторых частных случаев не соответствует действительности.

Целью настоящей работы является попытка обоснования интерференционного метода измерений флуктуаций УКВ.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФЛУКТУАЦИЙ УКВ ФАЗОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Для измерения углов прихода УКВ в невозмущенной среде используется метод, схематически изображенный на рисунке. Сигнал в точке C приемной системы может быть представлен в виде

$$\mathscr{E}_C(t) = [E(P_1)\, e^{i\varphi(P_1)} - E(P_2)\, e^{i\varphi(P_2)}]\, e^{-i\omega t}. \qquad (1)$$

При достаточно малых $\Delta\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$ и $E(P_1) = E(P_2) = E_0$

$$\mathscr{E}_C(t) \simeq -i\,\frac{2\pi l}{\lambda}\,\Theta E_0 e^{i[\varphi(P_1) - \omega t]}$$

и амплитуда выходного напряжения детектора (линейного) в некоторой окрестности $\Theta_0 = 0$ пропорциональна углу прихода плоской волны.

Рассмотрим случай, когда сигнал в точке приема может быть представлен в виде

$$\mathscr{E}(P, t) = \mathscr{E}_0(P, t) + \mathscr{E}_1(P, t),$$

где $\mathscr{E}_0(P, t)$ — регулярная компонента поля; $\mathscr{E}_1(P, t)$ — случайная функция пространства и времени.

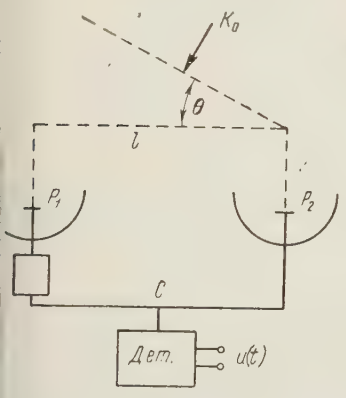
При $E_0(P_1) = E_0(P_2) = E_0$, где $E_0(P)$ — амплитуда регулярной компоненты поля, вместо (1) получим

$$\mathscr{E}_C(t) = [\mathscr{E}_1(P_1, t) - \mathscr{E}_1(P_2, t) + \mathscr{E}_0(P_1, t) - \mathscr{E}_0(P_2, t)].$$

Напряжение выхода $u(t)$ квадратичного детектора, подключенного точке C системы, будет равно

$$u(t) = \alpha\{E_1^2(P_1, t) + E_1^2(P_2, t) - 2E_1(P_1, t)\,E_1(P_2, t)\cos\Phi(t) + \\ + 4E_0E_1(P_2, t)\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin[\varphi_1(P_2, t) - \varphi_0] - \\ - 4E_0E_1(P_1, t)\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin[\varphi_1(P_1, t) - \varphi_0] + 2E_0^2 - 2E_0^2\cos\Delta\varphi\}, \qquad (2)$$

α — коэффициент пропорциональности, который достаточно легко определяется в процессе градуировки; $E_1(P_1, t)$, $E_1(P_2, t)$, $\varphi_1(P_1, t)$ и $\varphi_1(P_2, t)$ — мгновенные значения амплитуд и фаз нерегулярной компоненты поля в точках P_1 и P_2; $\Phi(t) = \varphi_1(P_2, t) - \varphi_1(P_1, t)$; φ_0 — фаза регулярной компоненты поля в точке C.



Схематическое изображение принципа измерения углов прихода интерференционным методом. k_0 — направление прихода плоской волны; Θ — угол фронта волны с базой приемных элементов; Φ — фазовращатель

Найдем математическое ожидание $\overline{u(t)}$ случайной функции $u(t)$, которое согласно (2) равно

$$\overline{u(t)} = \alpha\Big\{\overline{E_1^2(P_1, t)} - \overline{E_1^2(P_2, t)} - 2\overline{E_1(P_1, t)\,E_1(P_2, t)}\;\overline{\cos\Phi(t)} + \\ + 4E_0\overline{E_1(P_2, t)}\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\overline{\sin[\varphi_1(P_2, t) - \varphi_0]} - \\ - 4E_0\overline{E_1(P_1, t)}\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\overline{\sin[\varphi_1(P_1, t) - \varphi_0]} + 2E_0^2 - 2E_0^2\cos\Delta\varphi\Big\}. \qquad (3)$$

Черта сверху означает статистическое усреднение или усреднение по конечному ансамблю реализаций. Предполагается, что флуктуации плитуды и фазы нерегулярной компоненты поля статистически независимы. Последнее выполняется, например, при рассеянии на турбулентных неоднородностях при достаточно большой величине волнового параметра D [4].

Известно [5], что фаза электромагнитной волны, рассеянной на турбулентных неоднородностях, подчиняется нормальному закону распределения вероятностей. В этом случае разность фаз

$$\Phi(t) = \varphi_1(P_2, t) - \varphi_1(P_1, t)$$

дет иметь также нормальное распределение [6]

$$W(\Phi)\,d\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varphi}\exp\left[-\frac{(\Phi - \Phi_0)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right]d\Phi$$

с моментами

$$\Phi_0 = \overline{\Phi(t)} = \overline{\varphi_1(P_2, t)} - \overline{\varphi_1(P_1, t)},$$
$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_1^2 - 2f_\varphi(P_1, P_2) + \sigma_2^2,$$

где

$$\sigma_1^2 = \overline{[\varphi_1(P_1, t) - \overline{\varphi_1(P_1, t)}]^2}; \quad \sigma_2^2 = \overline{[\varphi_1(P_2, t) - \overline{\varphi_1(P_2, t)}]^2};$$
$$f_\varphi(P_1, P_2) = \overline{[\varphi_1(P_1, t) - \overline{\varphi_1(P_1, t)}][\varphi_1(P_2, t) - \overline{\varphi_1(P_2, t)}]}.$$

Таким образом, для $\overline{\cos\Phi(t)}$, $\overline{\sin[\varphi_1(P_1, t) - \varphi_0]}$ и $\overline{\sin[\varphi_1(P_2, t) - \varphi_0}$ имеем выражения

$$\overline{\cos\Phi(t)} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Phi} e^{-\frac{(\Phi-\Phi_0)^2}{2\sigma_\varphi^2}}\, d\Phi\right\} = \cos\Phi_0 e^{-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}},$$

$$\overline{\sin[\varphi_1(P_1, t) - \varphi_0]} = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\varphi-\varphi_0)} e^{-\frac{[\varphi-\overline{\varphi_1(P_1,t)}]^2}{2\sigma_1^2}}\, d\varphi\right\} =$$

$$= \sin[\overline{\varphi_1(P_1, t)} - \varphi_0]\, e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}},$$

$$\overline{\sin[\varphi_1(P_2, t) - \varphi_0]} = \sin[\overline{\varphi_1(P_2, t)} - \varphi_0]\, e^{-\frac{\sigma_2^2}{2}},$$

подстановка которых в (3) дает

$$\overline{u(t)} = \alpha\{\overline{E_1^2(P_1, t)} + \overline{E_1^2(P_2, t)} - 2\overline{E_1(P_1, t)E_1(P_2, t)}\cos\Phi_0 e^{-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}} +$$
$$+ 4E_0\overline{E_1(P_2, t)}\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin[\overline{\varphi_1(P_2, t)} - \varphi_0]\, e^{-\frac{\sigma_2^2}{2}} -$$
$$- 4E_0\overline{E_1(P_1, t)}\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin[\overline{\varphi_1(P_1, t)} - \varphi_0]\, e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}} + 2E_0^2 - 2E_0^2\cos\Delta\varphi\}. \quad (4$$

Из уравнения (4) следует, что: а) флуктуации на выходе системы опре деляются флуктуациями амплитуды и фазы нерегулярной компоненты поля на ее вход; б) флуктуации на выходе системы зависят от простран ственной (а в более общем случае от пространственно-временно́й) корреля ции поля; в) флуктуации на выходе системы зависят от амплитуды и раз ности фаз регулярной компоненты поля на ее входе.

Таким образом, результаты измерений являются достаточно сложно функцией параметров случайной и регулярной компонент поля, что в зна чительной степени осложняет их интерпретацию.

Для упрощения равенства (4) предположим, что

$$\overline{E_1^2(P_1, t)} = \overline{E_1^2(P_2, t)} = \overline{E_1^2},$$
$$\overline{E_1(P_1, t)} = \overline{E_1(P_2, t)} = \overline{E_1},$$
$$\overline{\varphi_1(P_1, t)} = \varphi(P_1), \quad (7$$
$$\overline{\varphi_1(P_2, t)} = \varphi(P_2),$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2.$$

Тогда в рассматриваемой области пространства, определяемой вели-ной базы l — системы, случайный процесс можно считать однородным, редняя фаза нерегулярной компоненты поля равна фазе регулярной компоненты.

Подставив (5) в (4), получим

$$\overline{u(t)} = \alpha\Big\{2\overline{E_1^2} - 2\overline{E_1(P_1,t)\,E_1(P_2,t)}\cos\Delta\varphi e^{-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}} + \\ + 8E_0\overline{E_1}\sin^2\Big(\frac{\Delta\varphi}{2}\Big)e^{-\frac{\sigma^2}{2}} + 2E_0^2 - 2E_0^2\cos\Delta\varphi\Big\}. \qquad (6)$$

При $\beta_0 > |\Delta\varphi| > 0$, таком, что $\sin\beta_0 \simeq \beta_0$, $\cos\beta_0 \simeq 1 - \frac{\beta_0^2}{2}$, и при полнении условия

$$2\,\overline{E_1^2} - 2\overline{E_1(P_1,t)\,E_1(P_2,t)}\,e^{-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}} \geqslant \Big[E_0^2 + 2E_0\overline{E_1}e^{-\frac{\sigma^2}{2}} + \\ + \overline{E_1(P_1,t)\,E_1(P_2,t)}\,e^{-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}}\Big]\beta_0^2 \qquad (7)$$

ормула (6) примет вид

$$\overline{u(t)} \simeq 2\alpha\Big[\overline{E_1^2} - \overline{E_1(P_1,t)\,E_1(P_2,t)}\,e^{-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}}\Big]. \qquad (8)$$

Из (8) видно, что флуктуации на выходе системы не зависят от ам-литуды и фазы регулярной компоненты поля на ее входе.

2. ОЦЕНКА ФЛУКТУАЦИЙ УКВ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РАССЕЯНИИ НА ТУРБУЛЕНТНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Проведем более детальный анализ уравнения (4) для практически кого случая распространения электромагнитной волны в статисти-ки неоднородной среде, когда поле в точке приема может быть пред-влено в виде

$$\mathscr{E}(P,t) = E(P,t)\,e^{i\varphi(P,t)}, \qquad (9)$$
$$E(P,t) = E_0(P) + E_1(P,t); \quad \varphi(P,t) = \varphi_0(P) + \varphi_1(P,t).$$

сь $E_0(P_1) = E_0(P_2) = E_0$, а $\varphi_0(P)$ является регулярной функцией ки наблюдения; $E_1(P,t)$ и $\varphi_1(P,t)$ — случайные функции простран-а и времени, такие, что $\overline{E_1(P,t)} = \varphi_1(P,t) = 0$.

В значительном числе практически важных случаев, например при пространении УКВ в зоне прямой видимости, можно считать, что

$$\overline{E_1^2(P,t)} \ll E_0^2, \quad \overline{\varphi_1^2(P,t)} \ll 1. \qquad (10)$$

Подстановка (9) в (4) с учетом (10) и при $|\Delta\varphi| \ll 1$ дает

$$\overline{u(t)} \simeq \alpha\Big\{2\overline{E_1^2} - 2\overline{E_1(P_1,t)\,E_1(P_2,t)} + E_0^2\sigma_\varphi^2 + \\ + \Big[E_0^2 - \frac{1}{2}E_0^2\sigma_\varphi^2 + \overline{E_1(P_1,t)\,E_1(P_2,t)}\Big](\Delta\varphi)^2\Big\}.$$

Накладывая на $\Delta\varphi$ условие, аналогичное (7), получим [7]

$$\overline{u(t)} \simeq \alpha\{2\overline{E_1^2} - 2\overline{E_1(P_1,t)\,E_1(P_2,t)} + E_0^2\sigma_\varphi^2\} = \\ = 2\alpha\{\sigma_E^2[1 - R_E(P_1,P_2)] + E_0^2\sigma^2[1 - R_\varphi(P_1,P_2)]\}, \qquad (11)$$
$$\beta_0 > |\Delta\varphi| > 0,$$

причем

$$[E_0^2 - \frac{1}{2} E_0^2\sigma_\varphi^2 + \overline{E_1(P_1, t)\, E_1(P_2, t)}]\, \beta_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\{\sigma_E^2 [1 - R_E(P_1, P_2)] + E_0^2\sigma^2 [1 - R_\varphi(P_1, P_2)]\}, \qquad (12$$

где

$$\sigma^2 = \overline{\varphi_1^2(P_1, t)} = \overline{\varphi_1^2(P_2, t)}; \quad \sigma_E^2 = \overline{E_1^2(P_1, t)} = \overline{E_1^2(P_2, t)},$$

а $R_E(P_1, P_2)$ и $R_\varphi(P_1, P_2)$ — пространственные коэффициенты корреля ции амплитуды и фазы поля.

Так, для плоской электромагнитной волны, прошедшей через стати стически неоднородную среду, получим [4]

$$\sigma^2 E_0^2 \simeq \sigma_E^2 \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} k^2 \overline{\mu^2} a L E_0^2,$$

$$R_E(P_1, P_2) + R_\varphi(P_1, P_2) = 2R_\varepsilon(P_1, P_2) \text{ при } D = 4\pi L/ka^2 \gg 1,$$

$$a \gg \lambda, \quad \vec{k} \perp l.$$

Здесь $\overline{\mu^2}$ — среднеквадратичные флуктуации показателя преломлени среды; a — размер неоднородностей; k — волновое число; L — длин трассы; $R_\varepsilon(P_1, P_2)$ — пространственный коэффициент корреляции флук туаций показателя преломления.

С другой стороны, при $D \ll 1$, $a \gg \lambda$, $\vec{k} \perp l$

$$\sigma^2 \simeq \sqrt{\pi}\, \overline{\mu^2} k^2 a L;$$

$$\sigma_E^2 \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{6} \overline{\mu^2} k^2 a L D^2 E_0^2;$$

$$R_E(P_1, P_2) = e^{-l^2/a^2}\left[1 - 2\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{a^2}\right)^2\right],$$

$$R_\varphi(P_1, P_2) = R_\varepsilon(P_1, P_2) = e^{-l^2/a^2},$$

т. е.

$$\frac{\sigma_E^2}{E_0^2\sigma^2} \simeq \frac{1}{6} D^2 \ll 1,$$

$$R_E(P_1, P_2) \leqslant R_\varphi(P_1, P_2),$$

и тогда для двух рассмотренных выше предельных случаев больши ($D \gg 1$) и малых ($D \ll 1$) дистанций из (18) получим

$$\overline{u(t)} \simeq 2\alpha\sqrt{\pi} k^2 \overline{\mu^2} a L E_0^2 [1 - R_\varepsilon(P_1, P_2)].$$

Таким образом, приходим к выводу, что при распространении эле тромагнитной волны в неоднородной среде флуктуации на выходе рассмо ренной системы при выполнении условия (7) или (12) при $D \gg 1$ опр деляются флуктуациями амплитуды и фазы поля на ее входе.

При $D \ll 1$ (приближение геометрической оптики) эти флуктуаци не зависят от флуктуаций амплитуды поля и определяются флуктуа циями фазы поля на входе системы и пространственным спектром неодн родностей показателя преломления среды, который в данном случа совпадает со спектром флуктуаций фазы.

ЛИТЕРАТУРА

K. A. Norton, L. E. Vogler, W. V. Mansfield, P. J. Short, The probability distribution of the amplitude of a constant vector plus a rayleigh-distributed vector, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 10, 1354.

J. W. Herbstreit, M. C. Thompson, Measurements of the phase of radio waves over transmission paths with electrical lengths varying as a result of atmospheric turbulence, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 10, 1391.

A. P. Deam, B. M. Fannin, Phase-difference variations in 9350-megacycle radio signals arriving at spaced antennas, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 10, 1402.

Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд. АН СССР, 1958.

B. R. Muchmore, A. D. Wheelon, Line-of-sight propagation phenomena. I. Ray treatment, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 10, 1437.

Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, 1950.

А. А. Семенов, Г. А. Карпеев, О применении структурных и корреляционных функций в исследовании стохастических процессов в физике, Изв. вузов МВО СССР (Физика), 1958, 3, 39.

Физический факультет
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
23 IV 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСТРОНАПРАВЛЕННЫХ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН С ОТРАЖАТЕЛЕМ ПЕРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ

Б. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, С. Э. Хайкин

Рассмотрено влияние случайных ошибок на электрические характеристики остронаправленных зеркальных антенн с отражателем переменного профиля. Получены выражения для диаграммы направленности и коэффициента усиления таких антенн с учетом случайных ошибок. Показано, что при выполнении отражателя переменного профиля из отдельных механически не связанных между собой элементов можно осуществить антенны с эффективной площадью, во много раз превышающей эффективные площади параболоидов вращения (порядка 50 раз).

Экспериментальная проверка некоторых полученных в работе выводов проведена на большом радиотелескопе ГАО АН СССР.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о влиянии случайных ошибок, неизбежных при изготовлении больших отражателей, является решающим при создании антенн, обладающих сверхбольшой направленностью. При достижимой в настоящее время относительной точности изготовления металлоконструкций, порядка 10^{-4}, максимально возможный размер зеркала, с абсолютной точностью его изготовления в одну десятую длины волны, составляет около 1000 длин волн и позволяет получить диаграмму шириной порядка четырех угловых минут.

Антенна с переменным профилем отражателя [1] дает возможность получить значительно большую направленность, так как случайные ошибки в этой антенне определяются в основном точностью геодезической установки отдельных ее элементов, которая может быть сделана весьма высокой (порядка 10^{-6}). Это подтверждается работой радиотелескопа ГАО [1], который при раскрыве в 4000 длин волн дает возможность получить диаграмму шириной в одну угловую минуту на волне 3 *см*, несмотря на то, что антенна установлена на относительно слабом грунте.

В антенне с переменным профилем отражателя, из-за особенностей ее конструкции, имеются ошибки, которых нет в сплошных зеркалах. Поэтому здесь рассмотрен вопрос о влиянии случайных и периодических ошибок применительно к такой антенне.

Случайные ошибки в антенне переменного профиля возникают за счет неточного изготовления поверхности отдельных элементов, неточной установки их центра относительно фокуса зеркала и неточной установки элементов по угловым координатам. Периодические ошибки обусловлены тем, что отражающая поверхность зеркала выполнена из отдельных плоских элементов.

Рассмотрение случайных ошибок дает возможность определить необходимую точность изготовления и установки элементов по трем коорди-

гам; рассмотрение же периодических ошибок позволяет правильно брать размеры элементов.

При исследовании создаваемого антенной поля, с учетом влияния учайных и периодических ошибок, удобно, как это принято в теории генн, перейти от рассмотрения реальной поверхности отражателя к верхности раскрыва антенны и перенести на эту поверхность все прицие антенне неточности. При этом следует учесть двойной путь прокдения излученной антенной энергии — от облучателя до поверхности ражателя и от отражателя до места приема. Необходимо далее учесть, синфазная поверхность раскрыва антенны с переменным профилем ражателя имеет прямоугольную форму лишь при направлении главного на антенны вдоль горизонта. При увеличении угла места основного на диаграммы синфазная поверхность раскрыва антенны искривляется, инимая форму части кругового кольца при излучении антенны под угм к горизонту.

Искривление синфазного раскрыва не сказывается на форме диаграмантенны в плоскости, наклонной к горизонту под заданным углом мес-

Однако диаграмма направленности антенны в вертикальной плоскости иеняется вместе с изменением угла места основного лепестка: при наавлении луча вдоль горизонта ширина диаграммы определяется высоi элементов антенны, а при увеличении угла места — общей высотой мента, образованного криволинейным раскрывом. Таким образом, рина диаграммы антенны в вертикальной плоскости уменьшается с еличением угла места.

Характерно, что влияние случайных ошибок на параметры антенны, к будет показано ниже, также уменьшается с увеличением угла места.

ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ПРИ НАПРАВЛЕНИИ ГЛАВНОГО ЛУЧА ХАРАКТЕРИСТИКИ ВДОЛЬ ГОРИЗОНТА

Для рассматриваемого здесь случая антенна переменного профиля едставляет собой параболический цилиндр, высота которого значительменьше его ширины. Независимые друг от друга в механическом отпении элементы антенны имеют три степени свободы: поступательное ремещение в горизонтальной плоскости и поворот вокруг горизонтальй и вертикальной осей. Неточное положение центра элемента вызыет случайные изменения фазы поля на раскрыве, а неточная ориентизка элементов по угловым координатам вызывает случайные изменения плитуды поля.

Последние обусловлены тем, что каждый из элементов обладает доточно большой направленностью.

Поле в дальней зоне для антенны с отражателем переменного профиля оответствии с общей методикой, предложенной в [2], имеет следующий д:

$$E(\varphi,\ \theta) = \sum_{n=1}^{N} \overline{f_n(\varphi,\ \theta)}\, e^{jnka_1 \sin\varphi}\, e^{j\,[1+\cos(\varphi+\psi)]\,kd_n}, \qquad (1)$$

a_1 — расстояние между отдельными элементами; d_n — независимые учайные отклонения центров элементов, направленные по радиусу-ктору из фокуса (рис. 1); N — число элементов; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое сло; $f_n(\varphi, \theta)$ — характеристика направленности отдельного элемента, учетом неточности изготовления его поверхности и неточной ориентизки его по азимутальному углу φ и углу места θ.

Диаграмма направленности отдельного плоского элемента может быть

выражена следующим образом:

$$f_n(\varphi, \theta) \simeq F_1 \frac{\sin\left[\frac{ka}{2}(\varphi + 2\alpha_n)\right]}{\frac{ka}{2}(\varphi + 2\alpha_n)} \frac{\sin\left[\frac{kh}{2}(\theta + 2\beta_n)\right]}{\frac{kh}{2}(\theta + 2\beta_n)}. \quad (2$$

Здесь α_n — ошибка в установке элемента по азимуту; β_n — ошибка в уста новке элемента по углу места; a — ширина элемента (при малом зазор между элементами можно принять $a_1 = a$); h — высота элемента; F

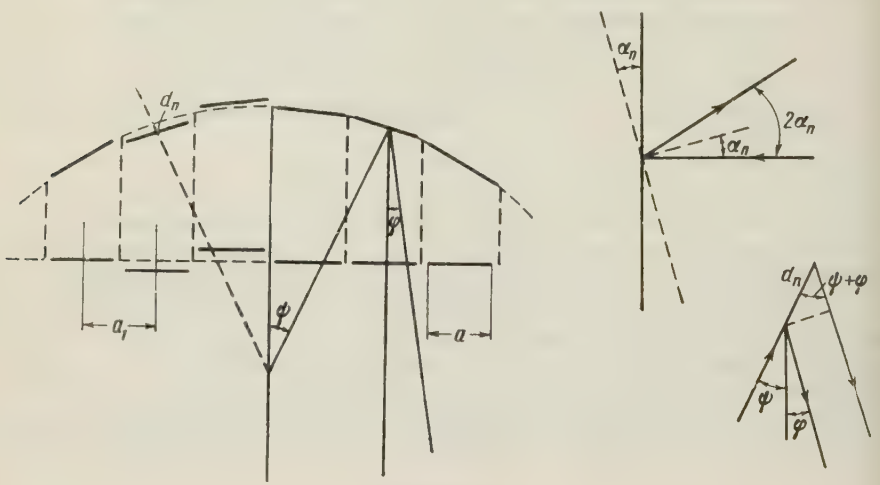


Рис. 1

характеризует уменьшение поля в главном направлении за счет нето ности изготовления плоской поверхности отражающего элемента пр малом интервале корреляции ошибки на листе (выражение для F_1 буде приведено ниже).

В этой работе мы будем в основном рассматривать влияние случайны ошибок на коэффициент усиления антенны. Влияние случайных ошибо на уровень боковых лепестков не имеет принципиального значения дл антенн с отражателем переменного профиля, поскольку специфичные дл этой антенны уровни лепестков по углу места превышают уровни лепест ков в обычных антеннах. Вопрос о влиянии случайных ошибок на уро вень побочных лепестков остронаправленных антенн детально рассмотре А. А. Пистолькорсом.

Ограничиваясь рассмотрением малых значений углов φ, θ и ψ, полу чим следующее выражение для диаграммы в горизонтальной плоскости

$$E(\varphi, \theta) = F_1 \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(ka\alpha_n)}{ka\alpha_n} \frac{\sin(kh\beta_n)}{kh\beta_n} e^{jnka \sin\varphi} e^{j2kd_n}. \quad (3$$

Характеристика направленности антенны по мощности равна

$$E^2(\varphi, \theta) = F_1^2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\sin(ka\alpha_n)}{ka\alpha_n} \frac{\sin(ka\alpha_m)}{ka\alpha_m} \times$$
$$\times \frac{\sin(kh\beta_n)}{kh\beta_n} \frac{\sin(kh\beta_m)}{kh\beta_m} e^{j(n-m)ka \sin\varphi} e^{j2k(d_n - d_m)}, \quad (4$$

где α_n, α_m, β_n, β_m, d_n, d_m — случайные величины.

Выделив из этого ряда члены с индексом $m = n$, найдем после нек

рых преобразований среднее значение квадрата напряженности поля

$$\overline{E^2(\varphi,\theta)} = F_1^2\left\{\left[\overline{\frac{\sin(ka\alpha_n)}{ka\alpha_n}}\;\overline{\frac{\sin(ka\alpha_m)}{ka\alpha_m}}\;\overline{\frac{\sin(kh\beta_n)}{kh\beta_n}}\;\overline{\frac{\sin(kh\beta_m)}{kh\beta_m}}\times\right.\right.$$
$$\times\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}e^{j(n-m)ka\sin\varphi} - N\,\overline{\frac{\sin^2(ka\alpha_n)}{(ka\alpha_n)^2}}\;\overline{\frac{\sin^2(kh\beta_n)}{(kh\beta_n)^2}}\Bigg]\times$$
$$\left.\times\,e^{\overline{j2k(d_n-d_m)}} + N\,\overline{\frac{\sin^2(ka\alpha_n)}{(ka\alpha_n)^2}}\;\overline{\frac{\sin^2(kh\beta_n)}{(kh\beta_n)^2}}\right\}. \qquad (5)$$

Характеристика направленности антенны в отсутствие в ней случайных ошибок определяется выражением

$$E_0^2(\varphi,0) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}e^{j(n-m)ka\sin\varphi} = N^2\,\frac{\sin^2\left(\frac{Nka}{2}\sin\varphi\right)}{N^2\sin^2\left(\frac{ka}{2}\sin\varphi\right)}; \qquad (6)$$

сюда среднее значение квадрата напряженности поля антенны примет едующий вид:

$$\overline{E^2(\varphi,0)} = F_1^2\left\{\overline{\frac{\sin(ka\alpha_n)}{ka\alpha_n}}\;\overline{\frac{\sin(ka\alpha_m)}{ka\alpha_m}}\;\overline{\frac{\sin(kh\beta_n)}{kh\beta_n}}\;\overline{\frac{\sin(kh\beta_m)}{kh\beta_m}}\times\right.$$
$$\left.\times\,e^{\overline{j2k(d_n-d_m)}}E_0^2(\varphi,0) + N\,\overline{\frac{\sin^2(ka\alpha_n)}{(ka\alpha_n)^2}}\;\overline{\frac{\sin^2(kh\beta_n)}{(kh\beta_n)^2}}\left[1-e^{\overline{j2k(d_n-d_m)}}\right]\right\}. \qquad (7)$$

Определим теперь средние значения всех величин, входящих в уравнение (7), полагая при этом, что случайные величины d, α и β распределены по нормальному закону.

Обозначая $d_n - d_m$ через ρ, получим

$$e^{\overline{j2k(d_n-d_m)}} = e^{\overline{j2k\rho}} = F_2^2 = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j2k\rho}\,e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2}}d\rho, \qquad (8)$$

е через σ_0 обозначено среднеквадратичное уклонение случайной вели-ны ρ;

$$\sigma_0^2 = \overline{\rho^2} = \overline{(d_n - d_m)^2}. \qquad (9)$$

бозначая среднеквадратичное уклонение положения центра элементов тенны через d и учитывая, что $d^2 = \overline{d_n^2} = \overline{d_m^2}$, а $\overline{d_n}\,\overline{d_m} = 0$, получим (9)

$$\sigma_0^2 = d_n^2 + d_m^2 = 2d^2. \qquad (10)$$

Подставляя в (8) значение σ_0 из (10) и производя интегрирование, олучим

$$F_2^2 = e^{-4k^2d^2}. \qquad (11)$$

Переходя к определению средних значений величин, зависящих от

угловых координат, имеем

$$\overline{\frac{\sin^2(ka\alpha_n)}{(ka\alpha_n)^2}} = M^2(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(ka\alpha)}{(ka\alpha)^2}e^{-\frac{\alpha^2}{2\alpha_0^2}}d\alpha, \tag{12}$$

$$\overline{\frac{\sin(ka\alpha_n)}{ka\alpha_n}} = \overline{\frac{\sin(ka\alpha_m)}{ka\alpha_m}} = F(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ka\alpha)}{ka\alpha}e^{-\frac{\alpha^2}{2\alpha_0^2}}d\alpha, \tag{13}$$

где через α_0 обозначено среднеквадратичное уклонение случайной величины α.

Производя интегрирование, найдем

$$M^2(\alpha_0) = \sqrt{\pi}\frac{\Phi(\sqrt{2}ka\alpha_0)}{(\sqrt{2}ka\alpha_0)} - \frac{1-e^{-2(ka\alpha_0)^2}}{2(ka\alpha_0)}, \tag{14}$$

$$F(\alpha_0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Phi\left(\frac{ka\alpha_0}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{ka\alpha_0}{\sqrt{2}}\right)}, \tag{15}$$

где

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(u - \frac{u^3}{3} + \ldots\right) \tag{16}$$

— интеграл вероятности, значения которого табулированы. Для определения средних значений величин, зависящих от угловой координаты β, можно воспользоваться уравнениями (14) и (15), в которых необходимо заменить a на h, а вместо значения α_0 подставить величину β_0, представляющую собой среднеквадратичное уклонение величины β.

Подставляя найденные средние значения функций в (7), найдем

$$\overline{E^2(\varphi, 0)} = F_1^2N^2\left[F_2^2F^2(\alpha_0)F^2(\beta_0)\frac{\sin^2\left(\frac{Nka}{2}\sin\varphi\right)}{N^2\sin^2\left(\frac{ka}{2}\sin\varphi\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N}(1-F_2^2)M^2(\alpha_0)M^2(\beta_0)\right]. \tag{17}$$

Это уравнение может быть использовано для определения функции F_1, определяющей уменьшение поля в главном направлении антенны за счет неточности изготовления плоской поверхности отражающего элемента. При малом интервале корреляции ошибки на листе и при малых по сравнению с волной размерах ошибки, функции от угловых координат в уравнении (17) обращаются в единицу. Полагая далее в (17) N стремящимся к бесконечности при конечном значении Na, легко показать, что значение F_1 будет совпадать с уравнением (11), в котором вместо значения d следует подставить среднеквадратичное уклонение случайной ошибки изготовления поверхности отдельных элементов антенны, которую мы обозначим через σ.

Возвращаясь к уравнению (17) и учитывая, что для антенн с переменным профилем отражателя значение N во много раз больше единицы, можно, с достаточной для наших целей точностью, пренебречь вторым слагаемым в этом уравнении.

гда окончательно получим

$$\overline{(\varphi, 0)} = N^2 e^{-4k^2(\sigma^2+d^2)} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Phi\left(\frac{ka\alpha_0}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{ka\alpha_0}{\sqrt{2}}\right)}\right]^2 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Phi\left(\frac{kh\beta_0}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{kh\beta_0}{\sqrt{2}}\right)}\right]^2 \frac{\sin^2\left(N\frac{ka}{2}\sin\varphi\right)}{N^2\sin^2\left(\frac{ka}{2}\sin\varphi\right)}. \quad (18)$$

Найдем теперь отношение коэффициента усиления антенны, имеющей чайные ошибки, к коэффициенту усиления идеальной антенны. Так для больших антенн влияние зеркала на облучатель ничтожно мало, интересующее нас отношение усилений совпадает с соответствующим ошением квадратов полей в главном направлении, т. е. при $\varphi = 0$. юда легко получаем, что

$$\frac{G}{G_0} = \frac{\overline{E^2(0,0)}}{E_0^2(0,0)} = e^{-4k^2(\sigma^2+d^2)} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Phi\left(\frac{ka\alpha_0}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{ka\alpha_0}{\sqrt{2}}\right)}\right]^2 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Phi\left(\frac{kh\beta_0}{2}\right)}{\left(\frac{kh\beta_0}{2}\right)}\right]^2. \quad (19)$$

Если разложить это выражение в ряд при помощи уравнения (16) граничиться малыми по величине ошибками, то уравнение (19) при-ает следующий вид:

$$\frac{G}{G_0} \simeq 1 - 16\pi^2\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{a\alpha_0}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{h\beta_0}{\lambda}\right)^2\right]. \quad (20)$$

Аналогичное выражение для обычного параболоида имеет, как изве-о [2], следующий вид:

$$\frac{G}{G_0} \simeq 1 - 16\pi^2\left(\frac{\sigma_1}{\lambda}\right)^2, \quad (21)$$

σ_1 — среднеквадратичное уклонение поверхности зеркала от идеаль-.

Из сравнения (20) и (21) видно, что в антенне, выполненной из отдель-элементов, суммарная ошибка складывается из четырех ошибок вме-одной для сплошного зеркала. Отсюда следует, что при одинаковой точ-ти изготовления суммарные потери усиления в антенне с переменным филем отражателя больше, чем потери в сплошной антенне. Однако достижимой в настоящее время точности изготовления зеркальных енн суммарная ошибка в многоэлементных антеннах получается мень-чем в зеркалах той же площади, но выполненных в виде одной моно-ной конструкции. В этом, собственно, и заключается основная идея енны с переменным профилем отражателя.

Для того чтобы определить зависимость потерь в усилении от величи-ошибок и установить допуск на установку элементов и на точность из-овления их поверхности, необходимо связать максимальную ошибку пуск ε) со среднеквадратичным уклонением (дисперсией σ).

Обычно считают [2], что среднеквадратичное уклонение случайной чины связано с максимально допустимой ошибкой следующей зависи-тью:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{2{,}6}. \quad (22)$$

Такая зависимость при нормальном законе распределения означает, максимальная ошибка $\varepsilon = 2{,}6\sigma$ возможна только в одном случае из т. е. ее вероятность равна 1%. Такая зависимость, по-видимому, не ем верна. Действительно, задавая максимальную ошибку, трудно га-тировать, что вероятность ее при изготовлении зеркала будет равна Можно только сказать, что вероятность ошибки, большей чем мак-

симальная, не превышает 1%. Максимальная же ошибка имеет значительно бо́льшую вероятность, поскольку при проверке поверхности шаблоном или другим приспособлением оставляют ошибки, равные допуску ε, как бы часто они не встречались.

В крайнем случае при законе распределения ошибок, близком к равновероятному, связь между среднеквадратичным уклонением и максимальной ошибкой определяется соотношением

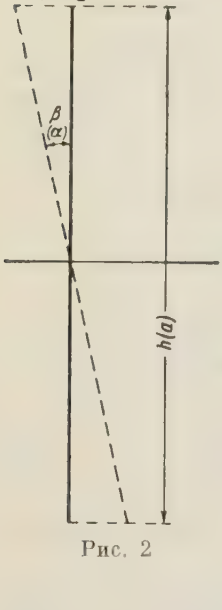


Рис. 2

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}. \tag{22'}$$

Это соотношение является предельным и для нормального закона распределения ошибок.

В дальнейшем при расчете потерь усиления рассматриваемой здесь антенны мы для удобства сравнения примем общепринятое пока соотношение (22).

Найдем теперь выигрыш по максимально допустимой площади, который может быть получен благодаря использованию антенн с переменным профилем отражателя по сравнению с обычными зеркальными антеннами, при одинаковой относительной потере усиления в обеих системах. Для удобства сравнения введем вместо ошибок по угловым координатам соответствующие отклонения кромок отдельных листов согласно рис. 2. В этом случае уравнение (20) примет следующий вид:

$$\frac{G}{G_0} = 1 - 16\pi^2\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta_n}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta_a}{\lambda}\right)^2\right]. \tag{20'}$$

Введя вместо среднеквадратичных уклонений σ, d, δ_n и δ_a соответствующие максимальные ошибки ε_σ, ε_d, ε_h и ε_a при помощи соотношения (22), получим

$$\frac{G}{G_0} = 1 - \left(\frac{4\pi}{2{,}6}\right)^2\left(\frac{\varepsilon_0}{\lambda}\right)^2, \tag{23}$$

где

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon_\sigma^2 + \varepsilon_d^2 + \frac{1}{3}\varepsilon_h^2 + \frac{1}{3}\varepsilon_a^2. \tag{24}$$

Свяжем теперь максимальные ошибки в антенне с относительной точностью изготовления металлоконструкций, точностью геодезической установки отдельных элементов антенны и зависимостью суммарной ошибки от длины волны. Обозначая высоту элементов антенны через h, а полный горизонтальный размер раскрыва антенны через D, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma &= 10^{-n}h, \\ \varepsilon_d &= 10^{-m}D, \\ \varepsilon_h &= 10^{-n}h, \\ \varepsilon_0 &= 10^{-l}\lambda. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь показатель n определяет относительную точность изготовления металлоконструкций, m — геодезическую точность установки элементов, l — зависимость максимально допустимой абсолютной ошибки от длины волны.

Так как размер элемента a, как правило, в несколько раз меньше его высоты, то с достаточной для наших целей точностью можно в уравнении (23) пренебречь ошибкой ε_a. Тогда, связывая между собой уравнения (23

24), получим

$$\frac{D}{\lambda} = 10^{(m-l)} \sqrt{1 - \frac{4}{3} 10^{-2(n-l)} \frac{h^2}{\lambda^2}}. \qquad (26)$$

Обозначая площадь выходного отверстия антенны через S, найдем

$$\frac{S}{\lambda^2} = 10^{(m-l)} \frac{h}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{4}{3} 10^{-2(n-l)} \frac{h^2}{\lambda^2}}. \qquad (27)$$

я обычного параболоида вращения с диаметром выходного отверстия D_0
ем

$$10^{-n} D_0 = 10^{-l} \lambda. \qquad (28)$$

Обозначая далее площадь выходного отверстия параболоида через S_0, учим

$$\frac{S_0}{\lambda^2} = \frac{\pi}{4} 10^{2(n-l)}. \qquad (29)$$

тересующее нас отношение площадей обоих типов антенн будет равно

$$\frac{S}{S_0} = \frac{4}{\pi} 10^{m+l-2n} \frac{h}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{4}{3} 10^{-2(n-l)} \frac{h^2}{\lambda^2}}. \qquad (30)$$

ксимальное значение S/S_0 и соответствующее ему максимальное значе- h/λ имеют следующий вид:

$$\frac{S_{\text{макс}}}{S_0} = 0{,}550 \cdot 10^{m-n}, \qquad \frac{h_{\text{макс}}}{\lambda} = 0{,}612 \cdot 10^{n-l}, \qquad (31)$$

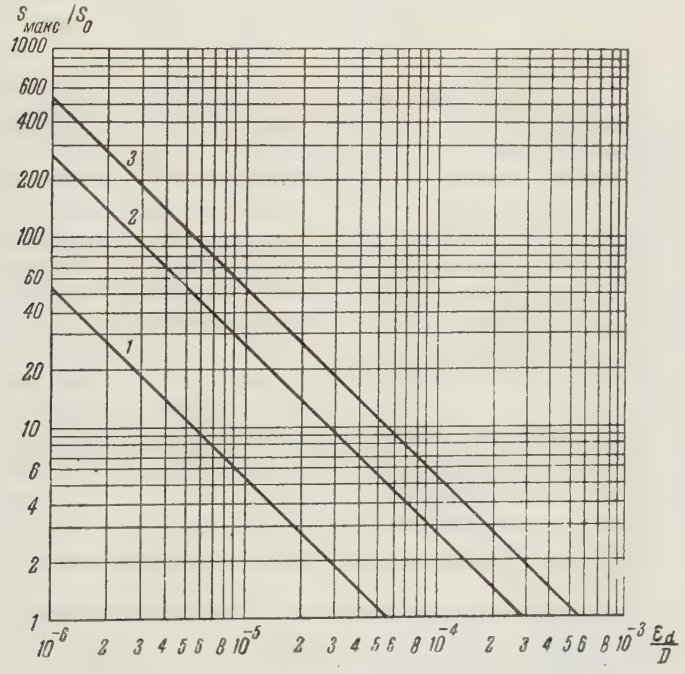


Рис. 3

1 — $\varepsilon_h/h = 10^{-4}$, $h_{\text{макс}}/\lambda = 612$; *2* — $\varepsilon_h/h = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_{\text{макс}}/\lambda = 122$; *3* — $\varepsilon_h/h = 10^{-3}$, $h_{\text{макс}}/\lambda = 61{,}2$

Результаты расчетов по этим формулам при максимально допустимой олютной ошибке в одну десятую длины волны ($l = 1$) приведены на . 3. На графиках дана зависимость выигрыша по максимально допу-

стимой площади антенн с переменным профилем отражателя ($S_{макс}/S_0$) от геодезической точности установки элементов (ε_d/D) для трех значений относительной точности изготовления металлоконструкции ($\varepsilon_h/h = 10^{-4}; 5\cdot10^{-4}; 10^{-3}$).

Как видно из графиков, выигрыш по максимально допустимой площади оказывается весьма значительным уже при геодезической точности установки элементов порядка 10^{-5}.

Следует отметить, что пока еще не совсем ясно, остается ли постоянным максимально возможное значение относительной точности изготовления металлоконструкции при существенном увеличе-

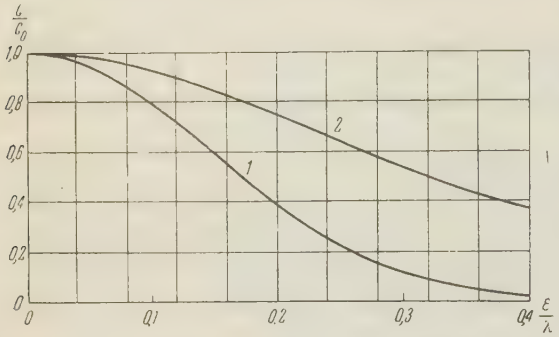


Рис. 4

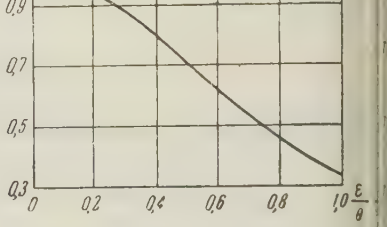


Рис. 5

$$1 - G/G_0 = e^{-\left(4{,}84\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^2}; \quad 2 - G/G_0 = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Phi\left(3{,}42\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)}{\left(3{,}42\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)}\right]^2 \qquad G/G_0 = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Phi\left(1{,}5\frac{\varepsilon}{\theta}\right)}{\left(1{,}5\frac{\varepsilon}{\theta}\right)}\right]^2$$

нии диаметра зеркала. Относительную точность порядка 10^{-4} удалось получить пока только на зеркалах диаметром 15 и 25 *м* (США, Германия).

Параболоид диаметром 76 *м*, установленный в Англии, позволяет пока работать на волне около 0,7 *м*, что соответствует относительной точности около 10^{-3}. В радиотелескопе ГАО получена относительная точность $4\cdot10^{-5}$ ($D = 120$ *м*, $\varepsilon = 5$ *мм*) при помощи инваровой проволоки и обычного теодолита. Этот результат позволяет надеяться, что применение точных геодезических приборов при установке антенны на скалистом грунте позволит получить точность $10^{-5}\div10^{-6}$ для раскрывов порядка 1 *км*.

Для расчета уменьшения коэффициента усиления антенны на рис. 4 и 5 даны вспомогательные графики значений основных множителей, входящих в уравнение (19). На рис. 4 дана зависимость указанных множителей от максимальной ошибки, определенной в соответствии с (22). Кроме того, ошибка по угловым координатам заменена здесь соответствующим отклонением кромок отдельных элементов согласно рис. 2. На рис. 5 дана зависимость усиления антенны от ошибки по угловым координатам, выраженной в долях ширины диаграммы одного элемента на уровне половинной мощности (θ).

Как видно из этих графиков, ошибки в установке элементов антенны по угловым координатам влияют значительно меньше, чем ошибки в установке центров элементов и ошибки при изготовлении их поверхности.

В заключение отметим также, что диаграмма направленности антенны при наличии в ней ошибок, как это следует из уравнения (17), состоит из неискаженной диаграммы в отсутствие ошибок в антенне и рассеянного поля с направленностью, определяемой диаграммой одного элемента, и амплитудой, обратно пропорциональной числу элементов.

В этом отношении антенна с переменным профилем отражателя не отличается от обычных зеркальных антенн [2].

2. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ПРИ НАПРАВЛЕНИИ ГЛАВНОГО ЛУЧА ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОД ЛЮБЫМ УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Рассмотрим влияние ошибок в антенне с переменным профилем отражателя для любых углов места в направлении главного максимума диаграммы направленности. Ограничиваясь здесь, так же как и ранее, малыми значениями углов ϕ, имеем в соответствии с рис. 6 следующие выражения для разности хода лучей, обусловленной ошибками в установке элементов и в изготовлении их поверхности:

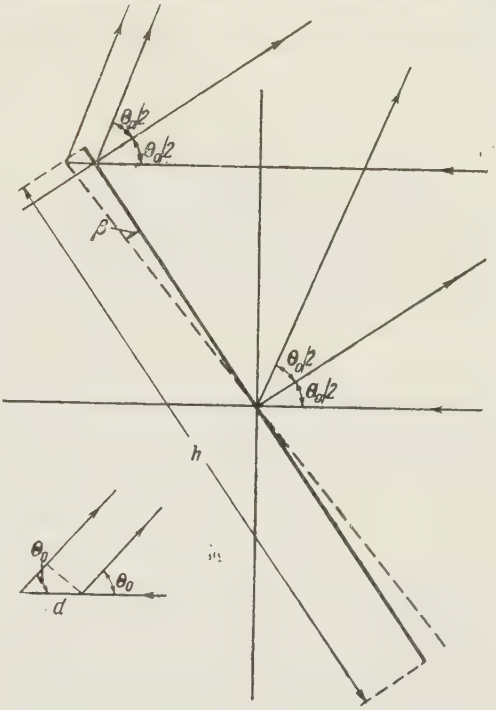


Рис. 6

$$= (1 + \cos\theta_0)\,\sigma = 2\sigma\cos^2\frac{\theta_0}{2},$$

$$= (1 + \cos\theta_0)\,d = 2d\cos^2\frac{\theta_0}{2},$$

$$= \frac{a\alpha_0}{2}(1 + \cos\theta_0) = a\alpha_0\cos^2\frac{\theta_0}{2},$$

$$= \frac{h\beta_0}{2}\frac{1 + \cos\theta_0}{\cos\frac{\theta_0}{2}} = h\beta_0\cos\frac{\theta_0}{2}, \qquad (32)$$

θ_0 — угол места главного луча характеристики антенны.

Сопоставляя эти данные с приведенными выражениями для диаграммы антенны в плоскости главного луча, нетрудно показать, что основное уравнение (19) остается справедливым и для рассматриваемого здесь случая, если положить значения d, σ и α_0 на $\cos\frac{\theta_0}{2}$, а значение β_0 — на $\cos\frac{\theta_0}{2}$. Криволинейность раскрыва при рассмотрении влияния ошибок в главном направлении не сказывается.

Отношение коэффициента усиления антенны, имеющей случайные ошибки, к коэффициенту усиления идеальной антенны в направлении места θ_0 будет при этом иметь следующий вид:

$$\frac{G(\theta_0)}{G_0(\theta_0)} = e^{-4k^2(\sigma^2+d^2)\cos^4\frac{\theta_0}{2}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Phi\left(\frac{ka\alpha_0}{\sqrt{2}}\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)}{\left(\frac{ka\alpha_0}{\sqrt{2}}\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)}\right]^2\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Phi\left(\frac{kh\beta_0}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta_0}{2}\right)}{\left(\frac{kh\beta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\right)}\right]^2. \qquad (33)$$

При малых ошибках уравнение (33) существенно упрощается:

$$\simeq 1 - 16\pi^2\left\{\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{a\alpha_0}{2}\right)^2\right]\cos^4\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{12}\left(\frac{h\beta_0}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right\}. \qquad (34)$$

Как видно из этих уравнений, потери в усилении падают с увеличением угла места. При направлении главного луча в зенит ($\theta_0 = 90°$) потери в усилении уменьшаются почти в четыре раза.

Для ускорения вычислений по формуле (33) можно использовать графики рис. 4. При этом необходимо по оси абсцисс откладывать значения ε/λ, умноженные в соответствии с (33) на $\cos^2\frac{\theta_0}{2}$ или на $\cos\frac{\theta_0}{2}$.

3. ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОШИБОК НА ХАРАКТЕРИСТИКИ АНТЕННОЙ СИСТЕМЫ

В рассматриваемой здесь антенне поверхность отражателя состоит из отдельных плоских элементов. Благодаря этому на раскрыве антенны появляется периодическая фазовая ошибка, период и величина которой определяются шириной элемента (рис. 7).

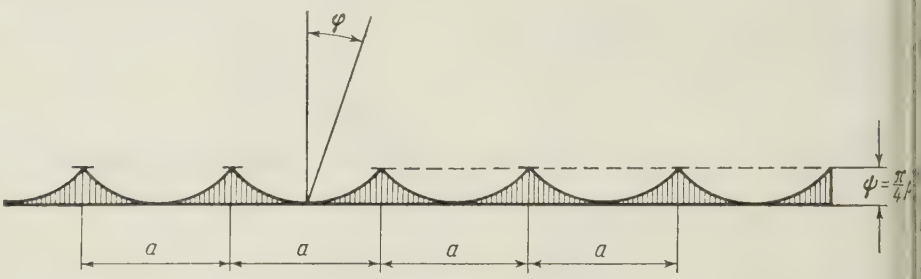


Рис. 7

Характеристика направленности антенны с таким раскрывом определяется следующим известным выражением:

$$E(\varphi) = F_1(\varphi)\,\frac{\sin\left(\frac{Nka}{2}\sin\varphi\right)}{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\varphi\right)}, \tag{2}$$

где через $F_1(\varphi)$ обозначена характеристика направленности одного элемента.

Максимальное значение фазовой ошибки, обусловленной заменой параболической поверхности зеркала соответствующим плоским элементом шириной a, определяется формулой

$$\psi = \frac{\pi}{4}\,\frac{a^2}{\lambda f}, \tag{3}$$

где f — фокусное расстояние зеркала.

При наличии такой квадратичной фазовой ошибки характеристика направленности одного элемента определяется следующими выражениями [3]:

$$F_1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}\,p}\sqrt{[C(\eta) - C(\xi)]^2 + [S(\eta) - S(\xi)]^2},$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{ka\sin\varphi}{p} + p\right), \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{ka\sin\varphi}{p} - p\right),$$

$$p = \frac{a}{\sqrt{\lambda f}}, \tag{3}$$

$$C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt = u\left(1 - \frac{\pi^2 u^4}{40} + \ldots\right),$$

$$S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt = \frac{\pi}{6}u^3\left(1 - \frac{\pi^2 u^4}{56} + \ldots\right).$$

Введенный здесь параметр p представляет собой отношение ширины элемента к протяженности первой зоны Френеля.

Полагая в уравнениях (37) $\varphi = 0$, нетрудно найти выражение, определяющее отношение усиления антенны с отражателем, состоящим из плоских элементов, к усилению антенны с параболическим зеркалом:

$$\frac{G}{G_0} = F_1^2(0) = \frac{2}{p^2}\left[C^2\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right) + S^2\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{38}$$

Для малых значений p удобно воспользоваться разложением интегралов Френеля в ряд, согласно (37). Тогда получим

$$\frac{G}{G_0} \simeq 1 - \frac{\pi^2}{180} p^4 + \ldots = 1 - \frac{\pi^2}{180}\left(\frac{a}{\sqrt{\lambda f}}\right)^4. \tag{39}$$

Обращаясь к уравнению (35), следует отметить, что благодаря наличию периодической фазовой ошибки на раскрыве в диаграмме направленности появляются боковые лепестки. Действительно, из уравнения (35) видно, что множитель решетки дает увеличение поля в N раз при

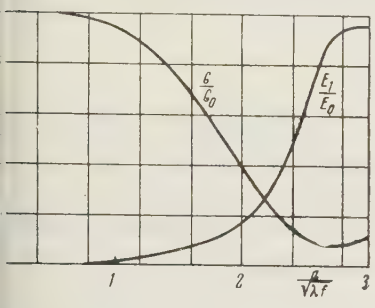


Рис. 8

$$\frac{ka}{2}\sin\varphi_n = n\pi, \tag{40}$$

где $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д. Соответствующие углы φ_n равны:

$$\varphi_n \simeq n\frac{\lambda}{a}. \tag{41}$$

В отсутствие фазовой ошибки на элементах создаваемое ими поле под углами φ_n равно нулю при любых значениях n, кроме нуля. По этой причине боковые лепестки под этими углами не наблюдаются. При наличии статичных фазовых ошибок на элементах антенны нулевые значения поля в их диаграммах отсутствуют, что и приводит к появлению удаленных боковых лепестков. Заметим, что основной лепесток диаграммы антенны при этом практически не искажается, поскольку он определяется множителем решетки, а не формой диаграммы образующих антенну элементов.

Найдем отношение поля в максимуме ближайшего бокового лепестка ($n = 1$) к полю в максимуме основного лепестка диаграммы. Из уравнений (37) и (40) нетрудно получить следующее интересующее нас выражение:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[C(\eta_1) - C(\xi_1)]^2 + [S(\eta_1) - S(\xi_1)]^2}{C^2\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right) + S^2\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)}}, \tag{42}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\pi}{p} + p\right); \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\pi}{p} - p\right).$$

Если воспользоваться асимптотическими разложениями интегралов Френеля при больших аргументах, то при малых значениях p получим

$$\frac{E_1}{E_0} \simeq \frac{p^2}{\left(2\pi^3 - \frac{\pi}{2}p^4\right)\left(1 - \frac{\pi^2}{360}p^4\right)} \simeq \frac{p^2}{62\,(1 - 0{,}053\,p^4)}. \tag{43}$$

На рис. 8 даны графики зависимости G/G_0 и E_1/E_0 от параметра p, вычисленные по формулам (38) и (42). Из этих графиков видно, что если раз-

мер плоского элемента взять равным протяженности первой зоны Фр
неля ($a = \sqrt{\lambda f}$), то усиление антенны упадет всего на 5%, а первый бок
вой лепесток, удаленный от основного максимума примерно на ширин
диаграммы одного элемента, составит всего только 2% по полю (0,04% п
мощности).

Из всего изложенного здесь можно заключить, что характеристик
направленности и коэффициент усиления антенны, отражатель котор
выполнен из отдельных плоских элементов, незначительно отличаются
характеристики направленности и коэффициента усиления антенны
сплошным отражателем, если размер одного элемента в горизонтальн
плоскости выбрать равным протяженности первой зоны Френеля. Зам
тим, что вертикальный размер плоского отражающего элемента опред
ляется только достижимой точностью изготовления его поверхности
конструкцией облучателя антенны, как это имеет место в обычных пер
скопических системах [4].

В заключение укажем, что результаты экспериментальной провер
некоторых полученных здесь выводов даны в работах [1, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Приборы и техника экспе
мента, 1959, 2, 19.
2. J. Robieu, Ann. Radioélectr., 1956, 11, 43.
3. А. З. Фрадин, Антенны сверхвысоких частот, 1957.
4. Л. Б. Тартаковский, А. М. Покрас, Радиотехника и электроника, 19
1, 2, 186.
5. Н. А. Есепкина, Приборы и техника эксперимента, 1959, 2, 24.

Поступила в редакцию
1 VII 1959

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СТЫКЕ СПИРАЛЬНОГО И СПЛОШНОГО КРУГЛОГО ВОЛНОВОДОВ

П. С. Микаэян

Рассмотрено решение задачи о дифракции электромагнитных волн на стыке обычного круглого и спирального волноводов. Задача решена при помощи функциональных уравнений. Произведен расчет коэффициента отражения и характеристики излучения симметричных волн. Получены численные результаты для коэффициента прохождения волны H_{01} из круглого волновода со сплошной стенкой в спиральный волновод.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время спиральные волноводы находят широкое применение в качестве передающих линий с малыми потерями. В связи с этим представляют интерес теоретические исследования задачи о прохождении электромагнитных волн через стык круглого волновода со сплошной стенкой и спирального волновода. Эту задачу можно решить методом, использованным в работе [1], причем в этой статье мы ограничимся рассмотрением симметричных волн.

Полученные в статье формулы позволяют рассчитать ряд физических величин, характеризующих дифракционные явления на стыке волноводов: коэффициент отражения поверхностной волны, распространяющейся вдоль спирального волновода, от стыка; характеристику излучения этой волны; коэффициент прохождения волны H_{01} через стык.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волноводную систему, изображенную на рис. 1. Стенку волновода считаем идеально проводящей и бесконечно тонкой.

Составляющая E_s электрического поля вдоль спиральной щели должна удовлетворять граничному условию

$$E_s = 0 \tag{1}$$

при $r = a$ и любых z, где a — радиус волновода; r — цилиндрическая координата.

Действительно, в очень узкой щели этой составляющей можно пренебречь. На ленте и стенке круглого волновода условие (1) вытекает из равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля. Составляющую E_t электрического поля в щели представляем в виде

$$E_t = f\left(\varphi - \frac{2\pi z}{d}\right)\int_C e^{iwz}\,\mathcal{E}(w)\,dw \quad \text{при} \quad z > 0, \quad r = a, \tag{2}$$

где $\mathcal{E}(w)$ — неизвестная функция; $f(\varphi)$ — функция распределения поля щели, удовлетворяющая соотношениям (4*), а контур C проходит, в соответствии по вещественной оси и охватывает точку, соответствующую волновому числу $w = -h$ набегающей волны*.

---

* Формулы из работы [1] будем далее всюду отмечать знаком *.

Электрическое и магнитное поля вычислим при помощи потенциалов Герца (5*). Выражая при $r = a$ через эти потенциалы E_s, E_t и сравнивая их с (1) и (2), получим

$$\left.\begin{aligned} F_m(w_m) &= -\frac{ck\cos\delta f_m \mathcal{E}(w)}{2\pi\varphi_m(w_m)\,v_m}, \\ G_m(w_m) &= \left(v_m\sin\delta - \frac{mw_m\cos\delta}{av_m}\right)\frac{cf_m\mathcal{E}(w)}{2\pi k\psi_m(w_m)}, \end{aligned}\right\}$$

где

$$\psi_m(w_m) = \pi v_m a J'_m(v_m a)\, H'_m(v_m a),$$

а $\varphi_m(w_m)$, v_m и w_m даны соотношениями (18*) и (7*).

По строгой теории составляющая H_s магнитного поля в щел должна быть непрерывной, но это условие не может быть выполнен

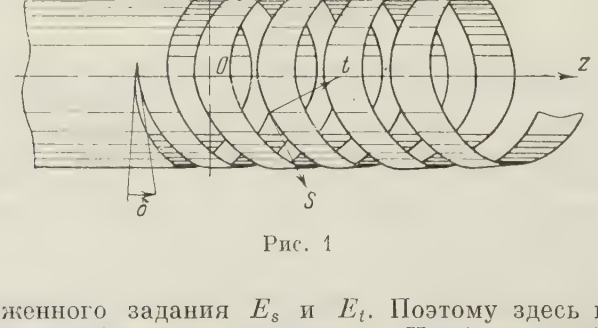


Рис. 1

ввиду приближенного задания E_s и E_t. Поэтому здесь нужно пользоваться каким-то приближенным условием. Наиболее удобным является усредненное граничное условие в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} [H_s(a+0) - H_s(a-0)]\, f^*(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Интегрируя по φ, получим следующее функциональное уравнение:

$$\int_C e^{iwz} L(w)\, \mathcal{E}(w)\, dw = 0 \quad \text{при } z > 0,$$

где $L(w)$ выражается суммой (16*), в которой функции $L_m(w)$ имеют вид

$$L_m(w) = \frac{\left[\frac{v_0^2\sin^2\delta}{k^2}\,\varphi_m(w_m) + \cos^2\delta\Phi_m(w_m)\right]k}{v_m\varphi_m(w_m)\,\psi_m(w_m)},$$

причем функция $\Phi_m(w_m)$ определяется соотношением (18*). При $z <$ $r = a$ (на сплошной стенке круглого волновода) составляющая E_t обращается в нуль; следовательно

$$\int_C e^{iwz}\mathcal{E}(w)\, dw = 0 \quad \text{при } z < 0.$$

Дисперсионным уравнением волн в спиральном волноводе является равенство $L(w) = 0$, где функция $L(w)$ входит в соотношение (6). Полюсы этой функции соответствуют волновым числам волн в круглом волноводе

тому из соотношений (7) и (16*) следует, что поверхностная волна, рагируя на стыке волноводов, возбуждает в сплошном волноводе все ы, какие только могут распространяться при данной частоте. Эти ы будем называть проходящими.

Уравнения (6) и (8) написаны для набегающей поверхностной волны, пространяющейся по спиральному волноводу к стыку. Однако эти внения применимы и для случая, когда волна набегает со стороны шного волновода. В этом случае за неизвестную функцию следует ть

$$D(w) = L(w)\,\mathscr{E}(w). \tag{9}$$

ответственно с этим меняются выражения (3), и функциональные урав- ия записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int_C e^{iwz} D(w)\,dw = 0 \qquad \text{при } z > 0,\\ &\int_C e^{iwz}\,\mathscr{L}(w)\,D(w)\,dw = 0 \quad \text{при } z < 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\mathscr{L}(w) = \frac{1}{L(w)}\,. \tag{11}$$

юда видно, что полюсы и нули функций $\mathscr{L}(w)$ и $L(w)$ взаимно совпа- т, соответственно с этим взаимно совпадают набегающие и проходящие ны.

Таким образом, задача о дифракции электромагнитных волн на стыке рального и сплошного круглого волноводов сводится к функциональ- уравнениям (6), (8) и (10) с одной неизвестной функцией $\mathscr{E}(w)$ или w) соответственно.

Для решения функциональных уравнений (6) и (8) самым простым яется предельный случай, когда $a \to \infty$ и волновод переходит в систему х полуплоскостей, одна из которых решетчатая, а другая сплошная. гом случае, если ограничиться слагаемым $m = 0$ в выражении для $L(w)$, учим коэффициент отражения поверхностной волны, совпадающий 26*), и характеристику излучения, отличающуюся от (28*) лишь по- янным множителем.

2. ДИФРАКЦИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В данной задаче, как и в [1], допустимо приближенное рассмотрение ракции симметричных поверхностных волн с учетом одного члена = 0) для функции $L(w)$. При этом дисперсионное уравнение имеет вид *). Из решения этого уравнения следует, что в случае однозаходного рального волновода частоты, удовлетворяющие условию нулевого странственного резонанса (30*), ниже критических частот в сплошном углом волноводе. Только в многозаходной спирали (см. [2]) может быть левой пространственный резонанс при частотах, превышающих крити- кие частоты для круглого волновода. Тогда симметричная поверхно- ая волна, трансформируясь на стыке спирального и сплошного круг- о волноводов, может возбуждать в последнем распространяющиеся стрые волны.

Будем искать решение уравнений (6) и (8) для многозаходного спираль- о волновода в предположении, что частоты нулевого пространствен- о резонанса расположены выше критических частот двух симметрич- х волн в круглом сплошном волноводе (E_{01} и H_{01}).

Для этого случая при помощи интегралов Коши следует произвести

факторизацию функции

$$g_0(w) = \frac{L_0(w)(w^2 - h_\nu^2)(w^2 - h_\mu^2)}{i(w^2 - h^2)}, \tag{1}$$

где $-h$ — волновое число набегающей поверхностной волны, а

$$h_\mu = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu}{a}\right)^2}, \quad \mu = 3{,}832\ldots, \tag{1}$$
$$h_\nu = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\nu}{a}\right)^2}, \quad \nu = 2{,}405\ldots.$$

Функция $g_0(w)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция γ_0 (см. (31*)), поэтому

$$g_0^{\pm}(w) = \sqrt{g_0(w)}\, e^{\pm\frac{w}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln g_0(u)\,du}{u^2 - w^2}}. \tag{1}$$

Тогда

$$L^{\pm}(w) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} g_0^{\pm}(w)}{(w \pm h_\nu)(w \pm h_\mu)}, \tag{1}$$

и неизвестная функция $\mathscr{E}(w)$ оказывается равной (ср. (23*))

$$\mathscr{E}(w) = \frac{ihL^+(h)\,A}{\pi(w^2 - h^2)L^-(w)}. \tag{1}$$

Теперь для коэффициента отражения (по току) при помощи формулы (25*) получим следующее выражение:

$$R_2 = -\frac{h-k}{h+k}\frac{h-h_\nu}{h+h_\nu}\frac{h-h_\mu}{h+h_\mu} e^{\frac{2h}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln g_0(u)\,du}{u^2 - h^2}}. \tag{1}$$

Отметим, что множители, соответствующие волнам E_{01} и H_{01}, появляются только при частоте выше критической частоты этих волн. Для однозаходной спирали модуль коэффициента R_2 можно записать в виде, пригодном для вычисления

$$|R_2| = \frac{h-k'}{h+k'} e^{X(h)}, \tag{18}$$

где

$$X(h) = \frac{2h}{\pi}\int_0^k \frac{\arg g_0(u)\,du}{u^2 - h^2}. \tag{19}$$

Численные результаты, полученные по формуле (18), изображены на рис. 2 непрерывными линиями. В предельном случае ($a \to \infty$) $|R_2|$ переходит в модуль коэффициента (26*). Значения последнего изображены на рисунке пунктирными линиями. Из рис. 2, где $h' = ha$, следует, что правая часть соотношения (18) быстро стремится к предельному значению с ростом $ka = \varkappa$.

При $k \to 0$ с помощью асимптотических выражений для бесселевых функций дисперсионное уравнение (29*) перепишем в виде

$$\frac{(h'^2 - \varkappa^2)\gamma^2}{4}\ln\frac{(h'^2 - \varkappa^2)\gamma^2}{4} = -\frac{\gamma^2\varkappa^2\operatorname{ctg}^2\delta}{4}, \quad \gamma = 1{,}7811\ldots. \tag{20}$$

шая это уравнение по методу итерации, в первом приближении для находим выражение

$$h' = \varkappa \sqrt{1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \delta}{2\ln \frac{\gamma \varkappa \operatorname{ctg} \delta}{2}}}, \tag{21}$$

зволяющее получить для $|R_2|$ следующую оценку:

$$|R_2| \simeq \frac{\operatorname{ctg}^2 \delta}{8\ln \frac{2}{\gamma \varkappa \operatorname{ctg} \delta}}. \tag{22}$$

о соотношение объясняет ход кривых (рис. 2) при $\varkappa \to 0$

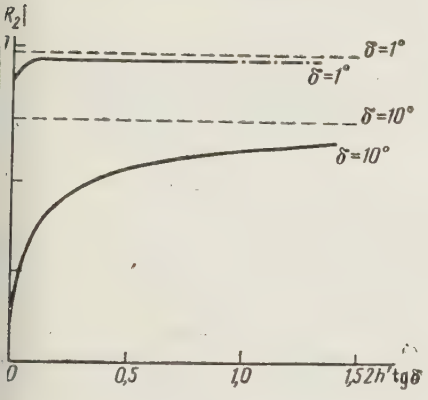


Рис. 2

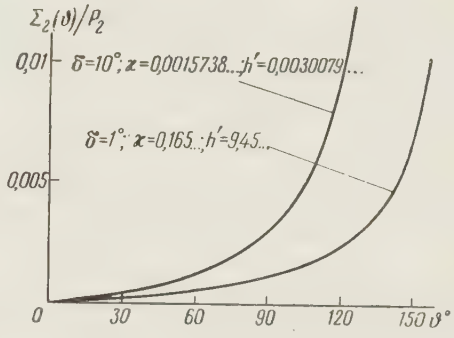


Рис. 3

Для многозаходного спирального волновода представляют интерес ффициенты прохождения волн E_{01} и H_{01}. Эти коэффициенты (по мощти) получим, взяв отношение мощностей, переносимых набегающей ерхностной волной и возбужденными ею волнами E_{01} и H_{01}. Для вылеия интересующих нас мощностей находим потенциалы при помощи числения вычетов и применяем формулы (8*), (9*) и (40*). В результе для проходящей волны H_{01} найдем следующий коэффициент:

$$t_{h,\mu} = \frac{4h_\mu h}{h^2 - h_\mu^2} |R_2| \frac{k + h_\mu}{k - h_\mu} \frac{h_\nu + h_\mu}{h_\nu - h_\mu} e^{-X(h_\mu)}. \tag{23}$$

ффициент прохождения волны E_{01} получим из (23) соответствующей еной волновых чисел.

Часть энергии, переносимой набегающей волной, излучается. Потенл поля излучения находим путем интегрирования по методу перевала. найденным потенциалам, используя формулы (8*) (9*) и (38*), вылим характеристику излучения. При частоте ниже критической эту актеристику можно записать в следующем, удобном для вычисления э:

$$\frac{\Sigma_2(\vartheta)}{P_2} = \frac{kh\,|R_2|}{\pi^2} \frac{(1 - \cos^2\vartheta)\,|\sin[\arg_0(k\cos\vartheta)]|}{\sin^2\vartheta\,(h^2 - k^2\cos^2\vartheta)} e^{X(k\cos\vartheta)}, \tag{24}$$

P_2 — мощность, переносимая набегающей волной. Численные резульы, полученные по этой формуле, приведены на рис. 3. При $\vartheta \to \pi$, ϑ — сферическая координата, отсчитываемая от положительной z. функция $\Sigma_2(\vartheta)$ стремится к бесконечности, причем для малых $\varkappa$ функция растет быстрее, чем для больших $\varkappa$. В пределе $a \to \infty$ чина $\Sigma_2(\pi)$ принимает конечное значение (см. формулу (28*)).

3. ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛНЫ H_{01} ИЗ СПЛОШНОГО КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА В СПИРАЛЬНЫЙ

Дифракцию симметричных волн E_{01} и H_{01}, набегающих по сплошному круглому волноводу к его стыку со спиральным волноводом, рассмотрим, аппроксимируя функцию $L(w)$ (см. (11)) одним членом ($m = 0$). Такое рассмотрение является приближенным, поскольку оно не учитывает отраженных и проходящих несимметричных волн, причем функция $\mathscr{L}(w)$ имеет полюсы в точках $w = \pm h$. Это означает, что набегающая волна возбуждает в спиральном волноводе поверхностную симметричную волну. На самом деле такой волны в однозаходной спирали не существует, так как частота не удовлетворяет условию нулевого резонанса. Поэтому решение задачи при данной аппроксимации допустимо лишь в том случае, когда коэффициенты отражения и прохождения малы или спираль многозаходная.

Для простоты записи возьмем такие частоты, при которых в круглом волноводе могут распространяться только две симметричные волны (E_{01} и H_{01}); в случае более высоких частот решение можно получить аналогичным путем. В этом случае при помощи интегралов Коши следует произвести факторизацию функции

$$d_0(w) = \frac{J_0(v_0a)\,H_0(v_0a)\,J_1(v_0a)\,H_1(v_0a)\,v_0^3\,(w^2-h^2)}{ik\,(w^2-h_\nu^2)\,(w^2-h_\mu^2)\left[\dfrac{v_0^2\sin^2\delta}{k^2}\,\varphi_0(w_0)+\cos^2\delta\Phi_0(w_0)\right]}. \tag{25}$$

Эта функция удовлетворяет тем же условиям, что и рассмотренная выше функция $g_0(w)$; по аналогии с (14) можно написать

$$d_0^{\pm}(w) = \sqrt{d_0(w)}\,e^{\pm\frac{w}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln d_0(u)\,du}{u^2-w^2}}. \tag{26}$$

Тогда в случае набегающей волны H_{01} получим

$$\mathscr{L}^{\pm}(w) = \frac{\pi a\,(k\pm w)\,(h_\nu \pm w)}{h\pm w}\,d_0^{\pm}(w)\,e^{\frac{i\pi}{4}}. \tag{27}$$

Теперь при помощи выражения (27) находим неизвестную функцию

$$D(w) = \frac{ih_\mu \mathscr{L}^{+}(h_\mu)\,B}{i\pi\,(w^2-h_\mu^2)\mathscr{L}^{+}(w)}, \tag{28}$$

где B — амплитуда тока набегающей волны. Функцию $D(w)$ для набегающей волны E_{01} получим из формул (27) и (28), заменяя h_μ на h_ν, h_ν на h_μ.

Для практики представляют интерес коэффициенты отражения, трансформации и прохождения по мощности. Выражения для этих коэффициентов найдем способом, использованным при получении коэффициента $t_{h,\mu}$ (см. (23)). В результате для отражений волны H_{01} будем иметь

$$r_{\mu,\mu} = \left(\frac{k+h_\mu}{k-h_\mu}\,\frac{h_\nu+h_\mu}{h_\nu-h_\mu}\,\frac{h-h_\mu}{h+h_\mu}\right)^2 e^{\frac{4h_\mu k}{\pi}\int_0^k \frac{\arg d_0(u)\,du}{u^2-h_\mu^2}}. \tag{29}$$

Набегающая волна H_{01} на стыке двух волноводов трансформируется

раженную волну E_{01} с коэффициентом трансформации

$$\widetilde{r}_{\mu,\nu} = \sqrt{\widetilde{r}_{\mu,\mu}}\,\frac{4h_\nu h_\mu}{h_\nu^2 - h_\mu^2}\,\frac{k+h_\nu}{k-h_\nu}\,\frac{h-h_\nu}{h+h_\nu}\,e^{\frac{2h_\nu}{\pi}\int_0^k \frac{\arg d_0(u)\,du}{u^2-h_\nu^2}}. \qquad (30)$$

эффициент прохождения поверхностной волны определяется формулой 3), поскольку набегающая волна H_{01} возбуждает поверхностную волну такой же степени, как и набегающая поверхностная волна возбуждает лну H_{01}.

Аналогичные выражения получаются для коэффициентов отражения прохождения в случае, если набегает волна E_{01}; их можно найти из соотношений (29) и (30) соответствующей заменой волновых чисел.

Численные результаты, полученные по формуле (29) при $\delta = 1°$ и $\varkappa = 5$, казывают, что коэффициент отражения очень мал, порядка 10^{-6}. римерно того же порядка получаются коэффициенты трансформации прохождения. Этот факт свидетельствует о том, что основная часть мощсти, приносимой набегающей волной H_{01} к стыку волноводов, излуется во внешнее пространство.

Как известно, волна H_{01} в спиральном волноводе затухает медленно . Поэтому для практики, в которой всегда имеем дело со спиральными тноводами конечной длины, представляет интерес коэффициент прохожния волны H_{01} из сплошного круглого волновода в спиральный. Этот эффициент (по мощности) можно вычислить как отношение мощностей, реносимых проходящей волной при $z = 0$ и набегающей волной.

Дисперсионное уравнение волны H_{01} в спиральном волноводе, подобе приведенному в [3], можно получить из соотношений (7) и (16*) пуи асимптотического суммирования. В качестве малого параметра возьм

$$\eta_1 = \sin\delta. \qquad (31)$$

и этом можно получить решение дисперсионного уравнения с точстью до величины порядка η_1^2, удерживая для функции $L(w)$ (см. (7) и *)) один член ($m = 0$).

Рассматривая прохождение волны H_{01} из сплошного круглого волноа в спиральный, нам следует при помощи интегралов Коши произти факторизацию функции

$$\widetilde{d}_0(w) = (w^2 - \widetilde{h}_\beta^2)\,d_0(w), \qquad (32)$$

h_β — волновое число волны H_{01} в спиральном волноводе. Это число мплексное и отличается от h_μ величиной порядка η_1^2.

При вещественных w факторизация функции (32) выражается формулой), если заменить $d_0(w)$ на $\widetilde{d}_0(w)$. При комплексных w будем иметь

$$\widetilde{d}_0^{\pm}(w) = e^{\pm\frac{w}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln \widetilde{d}_0(u)\,du}{u^2-w^2}}. \qquad (33)$$

Далее при помощи формул (27) и (28) вычислим неизвестную функцию x). Пользуясь этой функцией, получим выражения для мощностей, реносимых проходящей волной при $z = 0$ и набегающей волной, а вместе ими и коэффициент прохождения. Выражения для этих мощностей отаются на величину порядка η_1^2, так как в соотношении (33) контур инрирования можно провести через точку полюса, вычислить половину чета и интеграл взять в смысле главного значения. Поэтому, разлагая ношение мощностей в ряд по малому параметру и удерживая члены не

выше порядка η^2, получим коэффициент прохождения в виде

$$t_{01} = |1 - \eta^2 Q|, \qquad (3$$

где Q — коэффициент разложения, зависящий от частоты. Численные р зультаты, полученные по формуле (34) при $\varkappa = 5$, приведены в таблице

Такие же значения этот коэффициент имеет при передаче волны H из спирального волновода в волновод со сплошной стенкой.

Отметим, что изложенным методом можно решить задачу о дифра ции несимметричных волн. При этом можно показать, что в отличие от кру лого волновода с открытым концом [4], в котором набегающая и отраженны волны имеют одну и ту же азим тальную зависимость, наличие спирал ного волновода на конце сплошного пр водит к появлению отраженных волн любой азимутальной зависимостью. Пр этом волны, имеющие одно и то же во новое число, но различные азимутал ные зависимости ($e^{im\varphi}$ или $e^{-im\varphi}$), отра жаются с различными коэффициентам отражения. Можно также показать, чт в случае набегающей поверхностной волны несимметричные волны, пр ходящие в круглый волновод со сплошной стенкой и имеющие одно и т же волновое число, но различные азимутальные зависимости ($e^{\pm im\varphi}$), пр ходят с различными коэффициентами прохождения.

Таблица

s	1°	3°	5°
t_{01}	0,9995	0,99978	0,9964

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрев решение задачи о дифракции электромагнитных волн н границе спирального и сплошного круглого волноводов, мы получил формулы для коэффициентов отражения и характеристик излучени в случае набегающей симметричной волны. Проведенные расчеты п казывают, что с увеличением длины волны или угла подъема винтов линии δ модуль коэффициента отражения поверхностной волны умен шается. Этот коэффициент быстро стремится к предельному значени с ростом $\varkappa = ka$ ($a \to \infty$), где $k = \omega/c$ — волновое число и a — радиус во новода. Исследована также характеристика излучения симметричной п верхностной волны и ее зависимость от радиуса волновода a.

Коэффициенты отражения для волны H_{01} получаются малыми, так чт практически вся мощность, переносимая этой волной в круглом волно воде со сплошной стенкой, переходит в спиральный волновод.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Л. А. Вайнштейну за ру ководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Микаэян, Дифракция электромагнитных волн на открытом конц спирального волновода, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 3, 403.
2. Н. Н. Смирнов, Докл. АН СССР, 1956, 110, 2, 212.
3. Н. Н. Смирнов, ЖТФ, 1958, 28, 7, 1494.
4. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на откры том конце волновода, Изд. Советское радио, 1958.

Поступила в редакцию
7 VII 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 4

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА И ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ РЕЗОНАНС В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ, ПОМЕЩЕННОМ В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ СРЕДУ

В. П. Шестопалов

Методом теоремы Флоке [1—3] и усредненных граничных условий [8] получены дисперсионные уравнения спирального волновода, помещенного в магнитодиэлектрическую среду. Исследованы возможности применения усредненных граничных условий при решении задачи о распространении волн в кольцевых волноводах, а также при учете влияния размеров спирали на измеряемую величину диэлектрической проницаемости ε методом спирального волновода [13].

ВВЕДЕНИЕ

При установлении дисперсионного уравнения спирального волновода, помещенного в магнитодиэлектрическую среду, можно в качестве основного приближения задачи использовать теорему Флоке для периодических структур [1—3], предполагая, что ток, протекающий по спирали, удовлетворяет общим требованиям теоремы Флоке, но вынуждающий фактор его произволен. Определяя поля, возникающие от этого тока, и приравнивая нулю тангенциальную составляющую электрического поля на токовой поверхности, можно установить, что вынуждающий ток есть в действительности ток волны нормального типа. Это последнее условие в несколько обобщенном виде означает, что решения для волн нормального типа получены из требования, чтобы они не давали ни активной, ни реактивной мощности, выходящей за поверхность спирали. Полученное таким образом дисперсионное уравнение системы представляет собой бесконечный ряд, составленный из функций Бесселя, аргументами которых являются искомые продольные постоянные распространения (или фазовые скорости, зависящие от частоты). Исследование этого уравнения можно произвести, выделяя резонансные члены и соответственно преобразуя остатки характеристического уравнения.

Дисперсионное уравнение системы можно также сравнительно просто получить, считая с самого начала, что в спиральном волноводе, находящемся в магнитодиэлектрике, наступает явление пространственного резонанса [1—7]. Пространственный резонанс в спиральном волноводе возникает, когда на протяжении большого числа витков спирали ток на смежных участках витков имеет одинаковую фазу. В случае пространственного резонанса выражения для плотности поверхностного тока на поверхности спирали и электромагнитного поля, возбужденного этим током, значительно упрощаются: в рядах Фурье, через которые определяются поля и поверхностные токи, нулевой член (в случае нулевого пространственного резонанса) или m-й член (в случае m-го резонанса) является преобладающим по сравнению с другими и поэтому эти ряды можно заменить одним нулевым или m-м членом.

Как известно [4—8], при наличии пространственного резонанса точные дисперсионные уравнения для спирального волновода, находящегося в свободном пространстве или в среде, полученные, например, при помощи

теоремы Флоке, могут быть упрощены выделением резонансных членов. Учет нерезонансных членов при этом производится или непосредственной оценкой остатков в точных дисперсионных уравнениях после выделения резонансных членов (эта задача представляет значительные трудности) или установлением соответствующих граничных условий при решении краевой задачи о распространении электромагнитных волн в спиральном волноводе с учетом периодичности и размеров проводников спирали. Для ленточной спирали, находящейся в свободном пространстве, граничные условия в случае узких лент и широких щелей были сформулированы в работах Мойжеса [9, 10] и применены для решения ряда задач Смирновым [5, 6, 11]. В работе [7] были установлены граничные условия для ленточной спирали, помещенной в магнитодиэлектрик, когда поверхностный ток спирали течет произвольным образом.

В настоящей работе получены и исследованы дисперсионные уравнения для замедляющей системы типа спираль — магнитодиэлектрик [12] при помощи теоремы Флоке (§ 1) и граничных условий работы [7] (§ 2). Рассмотрены также некоторые применения граничных условий [7] при решении задачи о распространении электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе с периодическими щелями, помещенных в диэлектрическую трубку (§ 3), а также при исследовании влияния периодичности спирали и ее размеров на величину измеряемых ε методом спирального волновода [13] (§ 4).

1. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА И ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ РЕЗОНАНС КОАКСИАЛЬНОЙ СПИРАЛЬНОЙ ЛИНИИ, ПОМЕЩЕННОЙ В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ СРЕДУ

Рассмотрим систему, состоящую из бесконечно тонкой спиральной ленты, помещенной в цилиндрический волновод. Внутри спирали находится свободное пространство; между спиралью и волноводом — магнитодиэлектрик с диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями. Радиус спирали a, d — ее период, l — ширина спиральной ленты, 0 — угол намотки, b — радиус волновода.

Согласно теореме Флоке линейная плотность тока на ленте подчиняется рекуррентному соотношению

$$\vec{\mathscr{K}}(a,\ \varphi,\ z+d) = \text{const}\,\vec{\mathscr{K}}(a,\ \varphi,\ z),$$

где постоянная не зависит от координат. Симметрия системы предполагает, что вдоль спирального пути $\frac{2\pi}{d}\cdot z - \varphi = \text{const}$ плотность тока будет представлена бегущей волной. Компоненты тока в цилиндрической системе координат могут быть представлены в виде рядов Фурье

$$\mathscr{K}_\varphi = e^{-ih_0 z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_{\varphi n}\,e^{-in\left(\frac{2\pi}{d}z-\varphi\right)};\quad \mathscr{K}_z = e^{-ih_0 z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_{zn}\,e^{-in\left(\frac{2\pi}{d}z-\varphi\right)},$$

в которых $\mathscr{K}_{\varphi n}$ и $\mathscr{K}_{zn}$ зависят от поперечного распределения тока. Таким образом, разрывный ток на поверхности спиральной ленты представляется в виде бесконечной суммы непрерывных поверхностных токов. Можно определить поля от каждого из этих токов. Общее поле находится их суммированием.

Используя граничные условия на поверхности $r = a$

$$E^1_{zn} = E^2_{zn};\quad E^1_{\varphi n} = E^2_{\varphi n};\quad H^1_{zn} - H^2_{zn} = \mathscr{K}_{\varphi n};\quad H^2_{\varphi n} - H^1_{\varphi n} = \mathscr{K}_{zn}$$

и на металлическом кожухе $r = b$, получаем выражения для n продольных составляющих полей внутри спирали (индекс 1 и между

спиралью и волноводом (индекс 2):

$$E^1_{zn} = i\frac{\gamma_n a}{ka}\left[\frac{nh_n a}{(\gamma_n a)^2}\mathscr{H}_{\varphi n} - \mathscr{H}_{zn}\right]\frac{\alpha' - \dfrac{K_n(\gamma_n a)}{I_n(\gamma_n a)}}{\varepsilon\left(\alpha' - \dfrac{K'_n(\gamma_n a)}{I'_n(\gamma_n a)}\right) - \left(\alpha' - \dfrac{K_n(\gamma_n a)}{I_n(\gamma_n a)}\right)}\frac{I_n(\gamma_n r)}{I'_n(\gamma_n a)},$$

$$H^1_{zn} = \mathscr{H}_{\varphi n}\frac{\mu\left(\alpha - \dfrac{K'_n(\gamma_n a)}{I'_n(\gamma_n a)}\right)}{\mu\left(\alpha - \dfrac{K'_n(\gamma_n a)}{I'_n(\gamma_n a)}\right) - \left(\alpha - \dfrac{K_n(\gamma_n a)}{I_n(\gamma_n a)}\right)}\frac{I_n(\gamma_n r)}{I'_n(\gamma_n a)},$$

$$E^2_{zn} = i\frac{\gamma_n a}{ka}\left[\frac{nh_n a}{(\gamma_n a)^2}\mathscr{H}_{\varphi n} - \mathscr{H}_{zn}\right]\frac{\alpha' - \dfrac{K_n(\gamma_n r)}{I_n(\gamma_n r)}}{\varepsilon\left(\alpha' - \dfrac{K'_n(\gamma_n a)}{I'_n(\gamma_n a)}\right) - \left(\alpha' - \dfrac{K_n(\gamma_n a)}{I_n(\gamma_n a)}\right)}\frac{I_n(\gamma_n r)}{I'_n(\gamma_n a)}, \quad (1)$$

$$H^2_{zn} = \mathscr{H}_{\varphi n}\frac{\alpha - \dfrac{K_n(\gamma_n r)}{I_n(\gamma_n r)}}{\mu\left(\alpha - \dfrac{K'_n(\gamma_n a)}{I'_n(\gamma_n a)}\right) - \left(\alpha - \dfrac{K_n(\gamma_n a)}{I_n(\gamma_n a)}\right)}\frac{I_n(\gamma_n r)}{I_n(\gamma_n a)},$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{h_n^2 - k^2\varepsilon\mu}; \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{d}; \quad h_0 = \frac{\omega}{v_{\text{фо}}};$$

$$\alpha = \frac{K'_n(\gamma_n b)}{I'_n(\gamma_n b)}; \quad \alpha' = \frac{K_n(\gamma_n b)}{I_n(\gamma_n b)}; \quad h_n > k; \quad h_n > k\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (2)$$

ω — круговая частота, c — скорость света в вакууме, $v_{\text{фо}}$ — фазовая скорость основной волны в системе). В соотношениях (1) везде опущен сомножитель $\exp\{i(n\varphi - h_n z)\}$. Выражения (1) записаны для случая, когда радиальная постоянная распространения имеет один и тот же вид в свободном пространстве и в среде. При помощи уравнений Максвелла можно записать поперечные составляющие электромагнитного поля.

Для спирали, заключенной в магнитодиэлектрическую трубку (a — внутренний, b — внешний радиусы трубки), поля сохраняют вид (1), только уже

$$\alpha = \frac{(1-\mu)K_n K'_n}{I_n K'_n - \mu I'_n K_n}; \quad \alpha' = \frac{(1-\varepsilon)K_n K'_n}{I_n K'_n - \varepsilon I'_n K_n} \quad (3)$$

(аргументы функций Бесселя $\gamma_n b$ опущены). Если прилегающая к спирали магнитодиэлектрическая среда в радиальном направлении простирается в бесконечность, то выражения (1) упрощаются и могут быть получены из (3) при $b \to \infty$.

Предполагая, что ленточный ток идет вдоль совершенного проводника, получим дисперсионное уравнение исследуемой системы. Сделанное предположение равносильно условию, что составляющая электрического поля E_t на ленте обращается в нуль. Так как плотность линейного тока всюду на ленты равна нулю, то это граничное условие можно записать как равенство нулю скалярного произведения

$$\vec{E}_t \vec{\mathscr{H}}^* = 0 \text{ (при } r = a). \quad (4)$$

Расписывая $\vec{E}_t$ и $\vec{\mathscr{K}}^*$ по компонентам, параллельным и перпендикулярным направлению спирали, и пренебрегая перпендикулярными составляющими тока, что справедливо для узких лент спирали, запишем (4) в следующем виде:

$$E_{\parallel}\mathscr{K}^*_{\parallel} = 0 \text{ (при } r = a). \tag{5}$$

Потребуем, чтобы равнялся нулю интеграл выражения (5) по поверхности $r = a$. Физически это требование означает, что нет ни активной, ни реактивной мощности, выходящей за поверхность ленты.

После соответствующих преобразований дисперсионное уравнение системы можно записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mathscr{K}_n|^2 \frac{1}{\gamma_n a}\left\{\frac{I'_n}{I_n}\frac{\alpha - \dfrac{K'_n}{I'_n}}{\dfrac{1}{\mu}\left(\alpha - \dfrac{K_n}{I_n}\right) - \left(\alpha - \dfrac{K'_n}{I'_n}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{I_n}{I'_n}\frac{\left(\alpha' - \dfrac{K_n}{I_n}\right)\left(\dfrac{\gamma_n a}{ka\operatorname{ctg}\theta} - \dfrac{nh_n a}{ka\gamma_n a}\right)^2}{\varepsilon\left(\alpha' - \dfrac{K'_n}{I'_n}\right) - \left(\alpha' - \dfrac{K_n}{I_n}\right)}\right\} = 0. \tag{6}$$

Аргументы функций Бесселя в (6) не выписаны и имеют вид $\gamma_n a$; α и α' определяются по формулам (2) или (3) в зависимости от того, будет ли система представлять собой коаксиальную спиральную линию, помещенную в магнитодиэлектрическую среду (2), или спираль просто заключена в магнитодиэлектрическую трубку (3). В случае, если магнитодиэлектрик в радиальном направлении простирается в бесконечность, т. е. $b \to \infty$ и (6) значительно упрощается.

В приближении $\mathscr{K}_{\parallel} = 0$ полученное характеристическое уравнение (6) является точным. Теперь необходимо задать распределение тока вдоль спирали $\mathscr{K}_{\parallel}$, для которого $\mathscr{K}_{\parallel n}$ является коэффициентом в разложении в ряд Фурье

$$\mathscr{K}_{\parallel} = e^{-ih_0 z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_{\parallel n}e^{-in\left(\frac{2\pi}{d}z - \varphi\right)}.$$

Итак, необходимо задать $\mathscr{K}_{\parallel n}$. Предполагая, что параллельная лента компонента тока стремится к бесконечности обратно пропорционально корню квадратному из расстояния от края ленты [22], что плотность тока симметрична оси поперечного сечения и что кривые распределения постоянной фазы есть линии, перпендикулярные к краю ленты, можно получить $\mathscr{K}_{\parallel n}$ в виде [3]

$$\mathscr{K}_{\parallel n} = \frac{\dot{I}}{d\cos\theta}J_0\left[\left(n + \frac{h_0 a}{\operatorname{ctg}\theta}\cos^2\theta\right)\frac{\pi l}{d}\right], \tag{7}$$

где $\dot{I}$ — амплитуда линейного тока; J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. При подстановке (7) в (6) постоянный множитель опускается.

Перейдем к упрощению характеристического уравнения (6). Фазовая скорость n-й составляющей поля в координатах ka, $h_0 a$ имеет вид

$$\frac{v_{\text{ф}n}}{c} = \frac{ka}{h_0 a} = \frac{ka}{h_0 a + n\operatorname{ctg}\theta}. \tag{8}$$

Из (8) вытекает, что n-я фазовая скорость, нормированная к скорости света, для данной точки характеристики распространения, построенной в координатах ka, h_0a, определяется наклоном линии, проведенной из точки $n\operatorname{ctg}\theta$ на оси h_0a в точку на характеристике (рис. 1). Граница запрещенных областей определяется из условия $\frac{v_{\varphi n}}{c} = 1$, что приводит к

$$ka = h_0a + n\operatorname{ctg}\theta.$$

Выше этой границы поле имеет $v_{\varphi n} > c$, ниже $-v_{\varphi n} < c$. Все полученные формулы дают поля, фазовая скорость которых меньше скорости света. Если же n-е поле имеет $v_{\varphi n} > c$, то его радиальная зависимость носит осцилляторный характер. Отметим, что в экранированной спирали могут распространяться как медленные, так и быстрые волны.

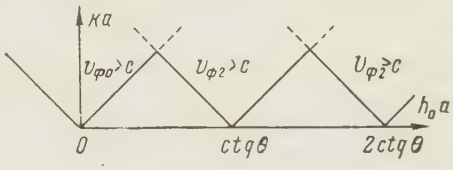


Рис. 1

Если выделить по h_0a полосу $(n-\frac{1}{2})\operatorname{ctg}\theta < h_0a < (m+\frac{1}{2})\operatorname{ctg}\theta$, где m—целое число, то, ограничиваясь рассмотрением $ka \ll \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta$, наибольшей фазовой скоростью в этой полосе будет обладать поле с индексом $n = -m$, а фазовые скорости остальных полей будут малы по сравнению со скоростью света, и эти поля будут локализоваться вокруг спиральной ленты. Поле же с индексом $n = -m$ может быть значительным в большей части поперечного сечения и содержать основную часть энергии полного поля. Следовательно, член характеристического уравнения, описывающий это поле, должен иметь преобладающее влияние в решении. Поэтому естественно составлять решения для каждой m-й полосы выделением главного (резонансного) члена дисперсионного уравнения для этой полосы (член с $n = -m$) и сопоставлением этого члена с суммой оставшихся членов.

Для облегчения вычисления $S_{R,m}$ — суммы оставшихся членов для m-го пространственного резонанса — на всей m-й полосе $\mathscr{K}_{\parallel n}$ будет выражаться как $J_0\left[(n+m)\frac{\pi l}{d}\right]$. Если подсчитать $S_{R,m}$ с точностью до членов $\sin\theta\ln\frac{\pi l}{d}$ первого порядка малости, то оказывается, что они имеют одинаковый вид для любых m:

$$S_{R,0} = S_{R,1} = \ldots = S_{R,m} = \frac{(h_0a)^2-(ka\operatorname{cosec}\theta)^2}{(ka\operatorname{ctg}\theta)^2}\sin\theta\ln\frac{\pi l}{d}.$$

Решение дисперсионного уравнения (6) можно теперь получить, например, в полосах $0 < h_0a < \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta$, $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta < h_0a < \frac{3}{2}\operatorname{ctg}\theta$, $\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\theta < h_0a < \frac{5}{2}\operatorname{ctg}\theta, \ldots$, что соответствует нулевому, первому, второму, ... пространственным резонансам. В случае нулевого резонанса (6) имеет вид

$$\left(\frac{ka}{\gamma_0a}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\theta\,\frac{\frac{1}{x}\frac{I_0(x)}{I_1(z)}\,\dfrac{\dfrac{K_0(x)}{I_0(x)}-\dfrac{K_0(z)}{I_0(z)}}{\varepsilon\left[\dfrac{K_0(z)}{I_0(z)}+\dfrac{K_1(z)}{I_1(z)}\right]+\left[\dfrac{K_0(x)}{I_0(x)}-\dfrac{K_0(z)}{I_0(z)}\right]}+\dfrac{2}{1+\varepsilon}\sin\theta\ln\dfrac{\pi l}{d}}{\frac{1}{x}\frac{I_1(x)}{I_0(x)}\,\dfrac{\dfrac{K_1(x)}{I_1(x)}-\dfrac{K_1(z)}{I_1(z)}}{\frac{1}{\mu}\left[\dfrac{K_1(z)}{I_1(z)}+\dfrac{K_0(x)}{I_0(x)}\right]+\left[\dfrac{K_1(x)}{I_1(x)}-\dfrac{K_1(z)}{I_1(z)}\right]}+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\mu}\right)\sin\theta\ln\dfrac{\pi l}{d}}, \tag{9}$$

где $x = \gamma_0a$; $z = \gamma_0b$.

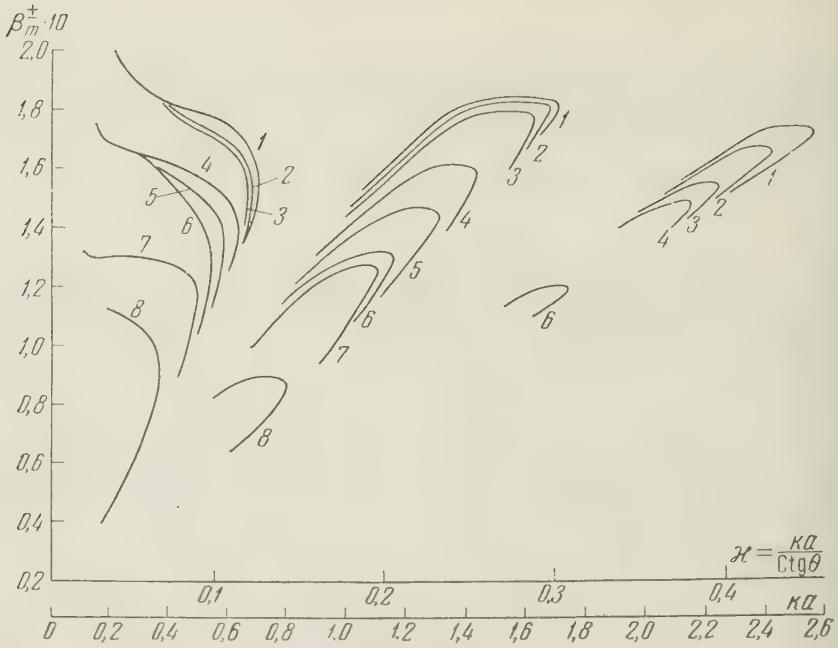

$\beta_m^{\pm} \cdot 10$
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
$\varkappa = \frac{ka}{\mathrm{Ctg}\,\theta}$
0,1
0,2
0,3
0,4
ka
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6

Рис. 2

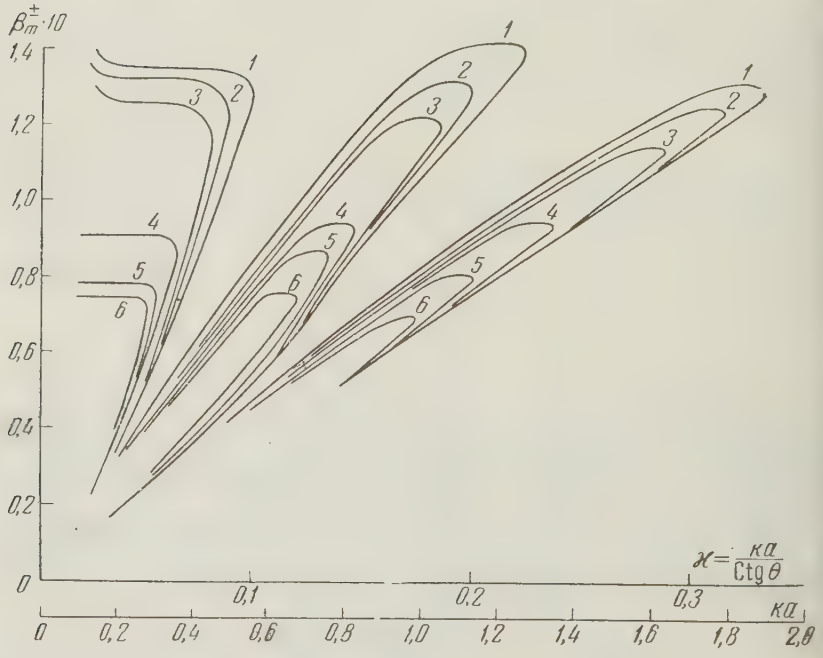

$\beta_m^{\pm} \cdot 10$
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
$\varkappa = \frac{ka}{\mathrm{Ctg}\,\theta}$
0,1
0,2
0,3
ka
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0

Рис. 3

Задавая различные значения x, получаем соответствующие значения Q_0 и определяем ka и h_0a из уравнений

$$ka = \gamma_0 a \sqrt{Q_0}; \quad h_0 a = \gamma_0 a \sqrt{Q_0 + 1}; \quad \frac{v_{\Phi 0}}{c} = \sqrt{\frac{Q_0}{1 + Q_0}}.$$

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые для $\theta = 10°$, $b/a = 2$ $l/d = 0{,}1$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$; 2; 81 (кривые *1*, *4*, *6*). Кривые *2*, *5*, *8* для $l/d = 0{,}5$, а кривые *3*, *7* для $l/d = 0{,}9$ при тех же значениях θ, b/a, μ и ε.

На рис. 3 представлены графики дисперсионных кривых для $\theta = 10°$, $b/a = 2$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$; 2; 40 (кривые *1*, *2*, *3*). Кривые *4*, *5*, *6* для $l/d = 0{,}5$ при тех же значениях θ, b/a, μ и ε.

Как видно из графиков рис. 2, 3, замедление системы увеличивается значительно с ростом ε и μ, особенно при $\varepsilon \simeq 10$ и $\mu \simeq 2$, а затем уже с дальнейшим увеличением ε и μ дисперсионные кривые почти сливаются, причем разрывность кривых уменьшается и соответствующим подбором ε и μ можно получить практически неразрывную дисперсионную кривую.

Отметим, что асимптотические значения для $v_{\Phi m}/c$ при больших частотах как в нулевом, так и в первом, втором, ... резонансах имеют одно и то же значение и записываются в виде

$$\frac{v_{\Phi m}}{c} \simeq \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\mu}}{1 + \varepsilon}} \sin\theta.$$

2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ РЕЗОНАНС В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ, ПОМЕЩЕННОМ В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИК

Как известно [4—8], условия нулевого и m-го пространственных резонансов для спирального волновода, находящегося в свободном пространстве, имеют следующий вид:

$$h_0 \ll \frac{2\pi}{d}; \quad h_0 \simeq \frac{2\pi}{d} m \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Выражения (10) могут быть записаны в иной форме:

$$d \ll \lambda_g; \quad d \simeq m\lambda_g \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

где λ_g — длина волны в спиральном волноводе. На высоких частотах условия (10), (11) выражаются непосредственно через основной параметр спирали — угол намотки θ:

$$d \ll \lambda_0 \sin\theta; \quad d \simeq m\lambda_0 \sin\theta \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

где λ_0 — длина волны в свободном пространстве.

Условия пространственного резонанса в спиральном волноводе, помещенном в магнитодиэлектрик, могут быть установлены в явном виде после того, как будет определена длина волны λ_g в исследуемой системе. Для этого необходимо получить дисперсионное уравнение системы. При этом следует различать два возможных случая расположения магнитодиэлектрической среды по отношению к спирали: 1) между спиралью и коаксиальным ей магнитодиэлектриком существует зазор ($r = a$ — радиус спирали, $r = b$ — радиус магнитодиэлектрического канала); 2) спираль и магнитодиэлектрик непосредственно соприкасаются (для простоты будем считать, что магнитодиэлектрик в радиальном направлении простирается до бесконечности).

В первом случае дисперсионное уравнение можно получить, воспользовавшись усредненными граничными условиями [9, 10, 5, 6], на спирали для составляющих электрического поля (случай $2l \ll d$) и условиями непрерывности тангенциальных составляющих магнитных полей вдоль направления спирали. На границе магнитодиэлектрической среды ($r = b$) выполняются условия непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля. Используя эти граничные условия, получим следующее дисперсионное уравнение (для m-го пространственного резонанса):

$$\frac{\gamma_{10}^2}{k^2} \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\frac{1}{z}\Delta^{(+)} + \frac{n^2}{y^2}\frac{\Delta_e'}{\Delta_e} I_m(y) - \frac{\Delta_\mu'}{\Delta_\mu} I_m'^2(y) - \frac{\xi}{ka}}{I_m(y) K_m(y) - \frac{\Delta_e'}{\Delta_e} I_m^2(y) - \frac{\xi}{ka}}, \tag{12}$$

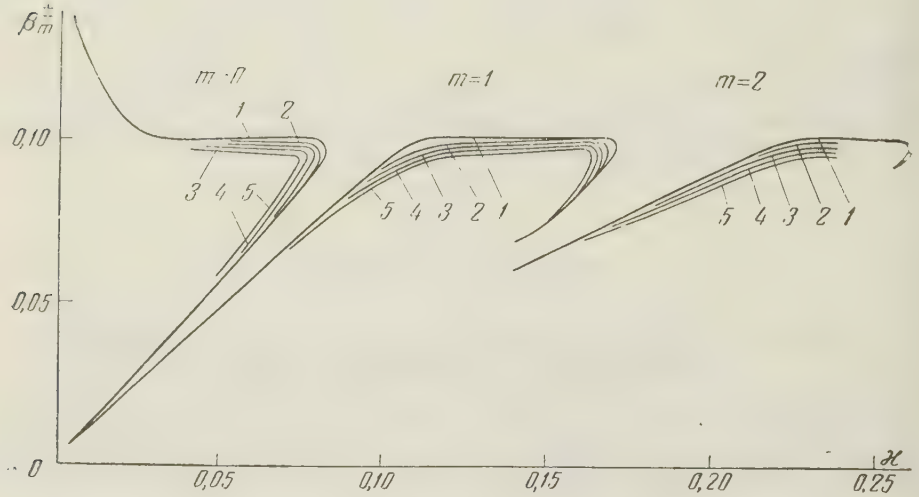


Рис. 4

где

$$2\Delta^{(+)} = I_{m+1}(y) K_{m+1}(y) + I_{m-1}(y) K_{m-1}(y);$$

$$y = \gamma_m a; \quad z = \gamma_m b; \quad \xi = \frac{kd}{2\pi} \ln \frac{\pi l}{d};$$

$$\Delta_e' = (1 - \varepsilon) K_m(z) K_m'(z);$$

$$\Delta_\mu' = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) K_m(z) K_m'(z); \tag{13}$$

$$\Delta_e = I_m'(z) K_m(z) - \varepsilon I_m(z) K_m'(z);$$

$$\Delta_\mu = \frac{1}{\mu} I_m'(z) K_m(z) - I_m(z) K_m'(z).$$

При $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ (12) переходит в дисперсионное уравнение для ленточ-

й спирали, находящейся в свободном пространстве [1, 5, 6]. В случае соких частот (12) принимает вид

$$\frac{\gamma_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1-\dfrac{1-\dfrac{1}{\mu}}{1+\dfrac{1}{\mu}}\,e^{-2(z-y)}-2y\,\dfrac{\xi}{ka}}{1-\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,e^{-2(z-y)}-2y\,\dfrac{\xi}{ka}}. \qquad (14)$$

На рис. 4 приведены дисперсионные кривые, построенные согласно) при различных значениях $\varepsilon = 1;\ 2;\ 9;\ 25;\ 81$ (кривые *1 2, 3, 4, 5*) $= 0{,}7$ *см*, $b = 0{,}8$ *см*, $2l/d = 0{,}1$, $\operatorname{ctg}\theta = 10$. Из графиков видно, что наличии зазора между спиралью и диэлектриком влияние диэлект-а на замедление $\beta^{\pm} = v_{\phi 0}/c$ незначительно.

Во втором случае, когда спираль и магнитодиэлектрик непосредст-но соприкасаются ($a = b$), граничные условия на спирали приобре-т несколько иной вид, чем в [9, 10, 5, 6]. Условия для составляю-х электрического поля вдоль спирали в этом случае записываются дующим образом:

$$\vec{E}_s = i\xi_1\{\vec{j}_s - \frac{1}{k_{12}^2}\operatorname{grad}_s \operatorname{div}\vec{j}\}, \qquad (15)$$

первый член в правой части (15) зависит от усредненных токов, ущих вдоль оси спирали, второй — от усредненных зарядов, распо-женных на спирали и прилегающей к ней среде. Ток зарядов $\vec{j}$ отли-от $\vec{j}_s$ и течет не строго вдоль оси нити спирали. Если предполо-ть, что все токи текут только вдоль $\vec{s}$ оси спирали, то из (15) полу-ится условие работы [10]. Более общее граничное условие для E_s учается из (15), если учесть, что $\vec{j} \neq \vec{j}_s$:

$$E_s = i\xi_1\left\{H_{2\tau} - H_{1\tau} + \frac{i}{k_{12}}\operatorname{grad}_s(E_{2r} - E_{1r})\right\}, \qquad (16)$$

$$\xi_1 = \frac{k_{12}\,d}{2\pi}\ln\sin\frac{\pi l}{d};$$

$$k_{12} = k\mu,$$

- единичный вектор, перпендикулярный $\vec{s}$ ($\vec{s}$ — единичный вектор, равленный вдоль оси спирали). Граничное условие (16) является обоб-нием известного условия работы [5], которое было получено для спи-и, находящейся в свободном пространстве. Условие (16) пригодно для их лент и широких щелей. Представляет интерес установить гранич-условия для широких лент и узких щелей.

Применяя принцип двойственности в формулировке Фельда [14], запи-, используя (16), граничное условие для спирали с широкими лентами зкими щелями

$$H_{s2} - H_{s1} = -4i\xi_2\left(E_\tau - \frac{i}{k_{12}}\operatorname{grad}_s H_r\right), \qquad (17)$$

$$\xi_2 = \frac{k'_{12}d}{2\pi}\ln\cos\frac{\pi l}{d};\quad k'_{12} = k\varepsilon.$$

Если $\vec{j} = \vec{j}_s$, то условие (17) упрощается и принимает вид

$$H_{s2} - H_{s1} = 4i\xi_2 \left(1 - \frac{h_n^2}{k_{12}^2}\sin^2\theta\right) E_\tau.$$

Записывая полную систему граничных условий для спирали с у
кими лентами и широкими щелями (16) в цилиндрической системе к
ординат и подставляя значения компонент полей, получим следующ
дисперсионное уравнение:

$$\frac{\gamma_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\Delta_e}{\Delta_\mu} \times$$

$$\times \frac{\frac{1}{\mu}\Delta^{(+)} + \frac{m^2}{y^2}\left(1 - \frac{\Delta_\mu}{\Delta_e}\right) I_m(y) K_m(y) - y\frac{\xi_1}{ka}\Delta_\mu \left[1 - \frac{m}{y}\left(1 - \frac{1}{y}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\mu}}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\theta\right)\right]}{I_m(y) K_m(y) - y\frac{\xi_1}{ka}\Delta_e} \tag{1}$$

где обозначения величин такие же, как и в (13), если $y = z = \gamma_m a$. Ан
логично получаем дисперсионное уравнение для спирали с широки
лентами и узкими щелями:

$$\frac{\gamma_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\Delta_e}{\Delta_\mu}\frac{\frac{\Delta^{(+)}}{I_m(y)K_m(y)} + \frac{m^2}{y^2}\left(1 - \frac{\Delta_\mu}{\Delta_e}\right) - 4\frac{\xi_2}{ka}\frac{R}{\Delta_0\Delta_e}}{1 - 4\frac{\xi_2}{ka}\frac{1+\frac{1}{\mu}}{1+\varepsilon}\frac{1}{\mu\Delta_0\Delta_\mu}}, \tag{1}$$

где

$$R = 1 - \frac{m^2}{y^2\mu}\frac{1+\frac{1}{\mu}}{1+\varepsilon}(1 - \varepsilon\mu);$$

$$\Delta_0 = \frac{I_m(y)}{I'_m(y)} - \frac{K_m(y)}{K'_m(y)}.$$

Для симметричных волн (при $m = 0$, случай нулевого простран
венного резонанса) из (18) и (19) находим дисперсионные уравнен

$$\frac{\gamma_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\Delta_e}{\Delta_\mu}\frac{I_1(y)K_1(y) - \frac{\xi_1}{ka}y\Delta_\mu}{I_0K_0 - \frac{\xi_1}{ka}y\Delta_e}, \tag{2}$$

$$\frac{\gamma_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\Delta_e}{\Delta_\mu}\frac{\frac{1}{\mu I_0(y)K_0(y)} - 4\frac{\xi_2}{ka}\frac{1}{\Delta_e}}{\frac{1}{yI_1(y)K_1(y)} - 4\frac{\xi_2}{ka}\frac{1}{\Delta_\mu}}. \tag{2}$$

Если в (20) числитель и знаменатель правой части разделить на
и Δ_e соответственно, то получим дисперсионную формулу, совпадающу
с (9), если в последней радиус волновода b устремить к бесконечност
Отметим, что совпадение (12) с (9) частичное — только в нерезонан
ных членах, — так как (9) является дисперсионным уравнением д
спирали, к которой диэлектрик примыкает вплотную, а (12) — для с
рали, находящейся в среде, не примыкающей к спирали. При $\xi_1 = 0$
$\xi_2 = 0$ $(d \ll a)$ уравнения (20), (21) принимают известный вид [15, 1

В случае больших частот (18) и (19) запишутся в следующем виде:

$$\frac{\gamma_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\mu}}\,\frac{1-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)y\frac{\xi_1}{ka}}{1-(1+\varepsilon)\,y\frac{\xi_1}{ka}};$$

$$\frac{\gamma_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\mu}}\,\frac{1-\frac{4y}{1+\varepsilon}\frac{\xi_2}{ka}}{1-\frac{4y}{1+\frac{1}{\mu}}\frac{\xi_2}{ka}}. \qquad (22)$$

ли $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ $(d \ll a)$, то из (22) находим

$$\frac{\gamma_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\mu}}. \qquad (23)$$

ои помощи дисперсионного уравнения (23) можно определить фазовую орость замедленной волны в явном виде через величины, характеризую-ие свойства среды и спирали. Оказывается, в этом случае фазовая ско-сть не зависит от частоты. Это позволяет сформулировать в явном де условия пространственного резонанса для спирального волновода, мещенного в магнитодиэлектрическую среду. Они принимают следую-й вид:

$$d \ll \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\mu}}{1+\varepsilon}}\,\lambda_0 \sin\theta;$$

$$d \simeq m\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\mu}}{1+\varepsilon}}\,\lambda_0 \sin\theta \quad (m = 1,\ 2, \ldots).$$

ли обозначить через $\lambda_g' = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\mu}}{1+\varepsilon}}\,\lambda_0 \sin\theta$ длину волны в спиральном новоде, помещенном в магнитодиэлектрик, то условия нулевого и го резонансов запишутся, как и (11):

$$d \ll \lambda_g'; \quad d \simeq m\lambda_g' \quad (m = 1,\ 2, \ldots).$$

метим, что условия пространственного резонанса в явном виде можно рмулировать только для случая, когда магнитодиэлектрик непосред-нно прилегает к спирали и фазовая скорость определяется из (23). другом взаимном расположении спирали и среды дисперсионные внения и на высоких частотах имеют вид сложных трансцендентных внений (14). Это не позволяет выразить явно фазовую скорость в виде стой функции от ε, μ и θ. Кроме того, во всех других случаях фазовая рость также будет зависеть и от λ_0.

На рис. 5 приведены графики дисперсионной зависимости, рассчитан-согласно (19) при $a = 0{,}7$ *см*, $\operatorname{ctg}\theta = 10$, $2l/d = 0{,}9$, $\mu = 1$ и $\varepsilon = 1$; ; 25; 81 (кривые *1*, *2*, *3*, *4*, *5*). В отличие от дисперсионных кривых, при-енных на рис. 4, где основную роль в замедлении волн играла спираль, ом случае (спираль непосредственно примыкает к магнитодиэлектрику) яду со спиралью главную роль играет окружающая спираль магнито-

диэлектрическая среда, влияние которой в основном характеризуется величиной

$$\frac{\Delta_\mu}{\Delta_e} \approx \frac{1+\frac{1}{\mu}}{1+\varepsilon}.$$

Анализ дисперсионных кривых, приведенных на рис. 4, 5, а также других кривых, которые здесь не приводятся, показывает, что магнитодиэлектрик оказывает существенное влияние на симметричные и несимметричные

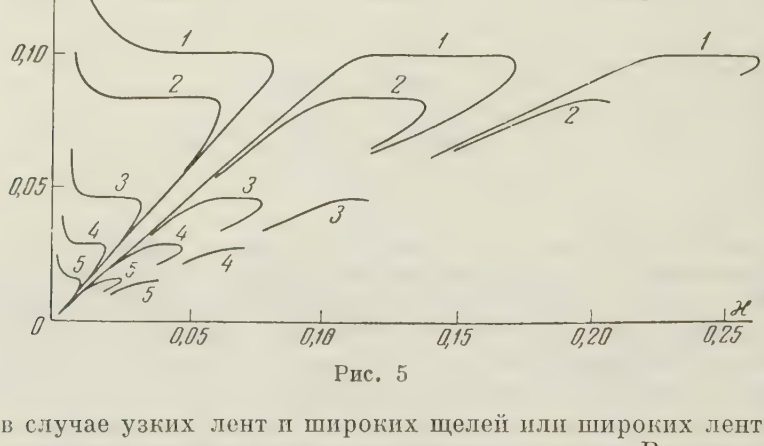


Рис. 5

волны (в случае узких лент и широких щелей или широких лент и узких щелей), когда он непосредственно прилегает к спирали. В то же время необходимо отметить, что если между спиралью и средой существует зазор, то симметричные волны обладают специфической дисперсионной характеристикой, которая в основном обусловлена влиянием границы магнитодиэлектрической среды и несомненно вызовет интерес при создании электронной аппаратуры, использующей в качестве замедляющей системы кроме спирали еще и магнитодиэлектрик [12]. Оказывается, что в этом случае существуют определенные значения ε ($1 < \varepsilon < 2$) и μ ($1 < \mu <$ (при соответствующем выборе зазора между спиралью и диэлектриком) для которых дисперсионная кривая будет иметь наибольшую пологую часть при $m = 0$.

Полученные выше результаты могут быть использованы для расчета замедляющих систем в лампах с бегущей волной. Представляет также интерес рассмотреть некоторые вопросы, при решении которых могут быть эффективно применены понятия пространственного резонанса и граничные условия (16), (17).

Рассмотрим в качестве примера две задачи. 1) Определим влияние тонкого слоя диэлектрика и периодических кольцевых щелей на затухание волн в круглом волноводе. 2) Установим влияние размеров спиральной ленты на величину диэлектрической проницаемости вещества, измеряемой методом спирального волновода.

3. ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ, ПОМЕЩЕННОМ В ДИЭЛЕКТРИК

Как известно [10, 11, 17—19], в реальных волноводных линиях волны затухают не только за счет омических потерь в стенках волноводов, но и за счет преобразования H_{01}-волны в другие типы волн на изгибах, стыках и других неоднородностях формы волновода. Поэтому возникает задача о создании таких волноводных линий передачи, в которых преобразование H_{01}-волны в другие типы волн либо вовсе отсутствует, либо сводится к минимуму. Наиболее эффективными в этом отношении являются самофил

рующие волноводы с диэлектрической пленкой, нанесенной на внутреннюю поверхность волновода [20], или волноводы с периодическими кольцевыми или спиральными щелями [10, 11, 21]. В [11] подробно исследованы вопросы затухания в волноводах с периодическими и спиральными щелями, если система находится в свободном пространстве. Реальные кольцевые и спиральные волноводы помещаются в диэлектрик. Анализ таких систем можно произвести на основании сформулированных выше граничных условий (16), (17).

Рассмотрим бесконечный, идеально проводящий круглый волновод с периодическими (период d) кольцевыми щелями (ширина щели $d - 2l$), на внутренней или внешней стенке которого имеется тонкая диэлектрическая трубка с диэлектрической проницаемостью ε. Ограничимся случаем распространения симметричных волн. Для TE-волн система граничных условий на волноводе и диэлектрике имеет вид (16) (диэлектрическая трубка радиуса a находится внутри волновода радиуса $b > a$):

$$H_{z1}(b) = H_{z2}(b); \quad E_{\varphi 1}(b) = E_{\varphi 2}(b); \quad E_{\varphi 2}(a) = E_{\varphi 3}(a);$$
$$E_{\varphi}(a) = -\frac{1}{2} ikl' [H_{z3}(a) - H_{z2}(a)].$$

Для TM-волн граничные условия запишутся в виде

$$H_{\varphi 1}(b) = H_{\varphi 2}(b); \quad E_{z1}(b) = E_{z2}(b); \quad E_{z2}(a) = E_{z3}(a); \tag{24}$$
$$H_{\varphi 2}(a) - H_{\varphi 3}(a) = -2ik_{12}l'' E_z(a),$$

где согласно [11]

$$l' = \frac{d}{\pi} \ln \sin \frac{\pi l}{d}; \quad l'' = \frac{d}{\pi} \ln \cos \frac{\pi l}{d},$$

индексы 1, 2, 3 относятся к областям внутри волновода, диэлектрика и свободного пространства соответственно.

Дисперсионное уравнение для TE-волн имеет вид [11]

$$J_1(\gamma a) = i \frac{\xi_0}{H_1^{(1)}(\gamma a)}; \quad \xi_0 = \frac{l'}{\pi a}.$$

Предполагая, что щели в волноводе очень узкие ($\xi_{l'} \ll 1$), из (25) методом малых возмущений находим

$$x_1 = x_0 + \xi_{l'}^2 x_0^2 \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{x_0} + \frac{\pi x_0}{2} [J_0(x_0) N_0(x_0) - iJ_0^2(x_0)] \right\}, \tag{25}$$

где $x_0 = 3{,}832$ — корень дисперсионного уравнения сплошного волновода ($J_1(x_0) = 0$). Затухание TE-волны определяется мнимой частью продольной постоянной распространения h [11]

$$\operatorname{Im} h_{TE} = \xi_0^2 \left(\frac{\pi x_0}{2}\right)^3 \frac{x_0}{2h_0 a^2} J_0^2(x_0). \tag{26}$$

Используя условия (24), получим дисперсионное уравнение для TM-волны:

$$\varepsilon \frac{x_1}{x_2} \frac{J_0(\rho x_1)}{J_1(\rho x_1)} =$$
$$= \frac{\xi_{l''} [\Delta_{He} J_0(\rho x_2) - \Delta_{ie} H_0^{(1)}(\rho x_2)] + ix_1 x_2 H_0^{(1)}(x_1) [J_0(\rho x_2) N_0(x_2) - J_0(x_2) N_0(\rho x_2)]}{\xi_{l''} [\Delta_{He} J_1(\rho x_2) - \Delta_{ie} H_1^{(1)}(\rho x_2)] + ix_1 x_2 H_0^{(1)}(x_1) [J_1(\rho x_2) N_0(x_2) - J_0(x_2) N_1(\rho x_2)]}, \tag{27}$$

где

$$\Delta_{He} = \varepsilon x_1 H_1^{(1)}(x_2) H_0^{(1)}(x_1) - x_2 H_0^{(1)}(x_2) H_1^{(1)}(x_1); \quad \xi_{l''} = 2\frac{k}{k_{12}}\frac{a}{l''};$$

$$\Delta_{ie} = \varepsilon x_1 J_1(x_2) H_0^{(1)}(x_1) - x_2 J_0(x_2) H_1^{(1)}(x_1); \quad \xi_0' = \frac{a}{\pi l''}; \; k_{12} = k\frac{1+\varepsilon}{2}.$$

Решение (27) имеет вид

$$x_1' = x_0' + \frac{\xi_{l''}}{x_0'} + \frac{\delta}{\varepsilon}\left[x_0'(\varepsilon - 1) - \frac{a^2k^2(\varepsilon - 1)}{x_0'}\right] - \frac{\xi_{l''}^2}{x_0'^2}\left\{\frac{3}{2}\frac{1}{x_0'} - \frac{\pi x_0'}{2}[J_1(x_0')N_1(x_0') + iJ_0^2(x_0')]\right\} \quad (28)$$

($x_0' = 2{,}405$ — решение $J_0(x_0') = 0$).

При помощи (28) находим затухание для TM-волны:

$$\operatorname{Im} h_{TM} = \frac{1}{2a^2h_0}\left\{\frac{2\varepsilon''}{(1+\varepsilon')^2}\xi_0'\pi + 2\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'^2}a^2h_0^2\delta - \xi_0'^2\frac{2\varepsilon''}{(1+\varepsilon')^2}\left(\frac{\pi}{2x_0'}\right)^2 2x_0'\left[\frac{3}{2}\frac{1}{x_0'} - \frac{\pi x_0'}{2}J_1(x_0')N_1(x_0')\right] + \left(\frac{\pi}{2x_0'}\right)^2\frac{8\varepsilon''}{(1+\varepsilon')^3}\xi_0'^2 + \pi^3 J_1^2(x_0)\left[\frac{1}{(1+\varepsilon_1)^2} - \frac{\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_1)^4}\right]\right\}.$$

Для идеального диэлектрика затухание TM-волны имеет вид (при $\delta \gg d$)

$$\operatorname{Im} h_{TM} = \frac{4}{1+\varepsilon}\xi_0'^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\frac{1}{a^2h_0}J_1^2(x_0').$$

Из (25) и (28) вытекает, что для передающих линий, в которых используются кольцевые волноводы с внутренней диэлектрической трубкой, необходимо выбирать диэлектрик с $\varepsilon \lesssim 2$.

Диэлектрическая трубка может быть размещена и на внешней поверхности кольцевого волновода. Произведенные расчеты показывают, что толщина внешней диэлектрической трубки не влияет на фазовую скорость TE- и TM-волн, распространяющихся в системе; это, в свою очередь, приводит к тому, что затухание в такой системе не зависит от толщины диэлектрической трубки. В случае идеального диэлектрика затухание TE- и TM-волн имеет такой же характер, как и для диэлектрической трубки, находящейся внутри кольцевого волновода.

4. ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ СПИРАЛЬНОЙ ЛЕНТЫ НА ВЕЛИЧИНУ ε ВЕЩЕСТВА, ИЗМЕРЯЕМУЮ МЕТОДОМ СПИРАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

В работе [13] был предложен новый метод измерения диэлектрических проницаемостей вещества методом спирального волновода. Данный метод отличается от известных тем, что в нем применена в качестве измерительной линии замедляющая система типа спиральный волновод, внутри которого помещается исследуемое вещество. Для обоснования предложенного метода измерения ε необходимо решить вопрос о влиянии периодических свойств спирали и ее размеров на величину измеряемых диэлектрических проницаемостей вещества. Эта задача может быть решена при помощи граничных условий (16), (17).

Пусть на сплошной диэлектрический цилиндр с диэлектрической проницаемостью ε намотана спиральная лента. Тогда для основной волны при

помощи (16), (17) можно установить следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{k^2} = \frac{I_1(\gamma_1 a)K_1(\gamma a) - \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}\sin\theta\ln\sin\frac{\pi l}{d}}{\gamma\gamma_1 I_0(\gamma_1 a)K_0(\gamma a) - (h^2L - k^2M)\,a\sin\theta\ln\sin\frac{\pi l}{d}} \times$$

$$\times \frac{\gamma\gamma_1 I_0(\gamma_1 a)K_0(\gamma a)a\sqrt{\frac{H\varepsilon}{2}} - \frac{R}{4\sin\theta\ln\cos\frac{\pi l}{d}}}{I_1(\gamma_1 a)K_1(\gamma a)\left(h^2 - k^2\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right)a - \frac{L}{4\sin\theta\ln\cos\frac{\pi l}{d}}}, \qquad (30)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{h^2 - \varepsilon k^2}; \quad \gamma = \sqrt{h^2 - k^2}; \qquad (31)$$
$$M = \gamma_1 I_0(\gamma_1 a)K_1(\gamma a) + \varepsilon\gamma I_1(\gamma_1 a)K_0(\gamma a);$$
$$L = \gamma_1 I_0(\gamma_1 a)K_1(\gamma\alpha) + \gamma I_1(\gamma_1 a)K_0(\gamma a).$$

При $\varepsilon = 1$ величины $\gamma = \gamma_1$, $M = 1/a$, $L = 1/a$ и (30) переходят в дисперсионное уравнение работы [5]. Отметим, что (30) получено при одновременном применении граничных условий (16), (17). Таким образом, уравнение (30) описывает дисперсионные свойства спирального волновода, помещенного в диэлектрик, при произвольных значениях $2l/d$. В частном случае, полагая в (30) $2l/d \to 1$, можно получить дисперсионные уравнения для TM- и TE-волн, распространяющихся в сплошном круглом волноводе, заполненном диэлектриком.

Из (30) для случая больших замедлений (при $\operatorname{ctg}\theta = 10 - 20$ имеет место с большой степенью точности замена $\gamma_1 \simeq \gamma \simeq h$, так как $h^2 \gg \varepsilon k^2$ и $h^2 \gg k^2$) на высоких частотах получаем следующее уравнение для искомого ε:

$$\varepsilon^3 + A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C = 0, \qquad (32)$$

где

$$A = 3 - \frac{\lambda_g'^2}{2\xi_1'\lambda_0^2} - \frac{8\lambda_0^2\xi_2'}{\lambda_g'^2\xi_1'}; \qquad \xi_1' = \frac{kd}{2\pi}\ln\sin\frac{\pi l}{d}; \qquad \xi_2' = \frac{kd}{2\pi}\ln\cos\frac{\pi l}{d};$$

$$B = 3 + \frac{4\xi_2'^2}{\xi_1'^2} - \frac{\lambda_g'^2}{\lambda_0^2\xi_1'^2} - \frac{16\lambda_0^2\xi_2'^2}{\lambda_g'^2} - \frac{8\operatorname{tg}^2\theta}{\lambda_g'^2\xi_1'^2}\left[\left(\frac{\lambda_g'}{2} + 2\frac{\lambda_0^2\xi_1'\xi_2'}{\lambda_g'}\right)\left(2\frac{\lambda_0}{\lambda_g'}\xi_2' - 1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\lambda_g'}{2} - \lambda_0\xi_1'\right)\right];$$

$$C = 1 + 4\frac{\xi_2'^2}{\xi_1'^2} - \frac{\lambda_g'^2}{2\lambda_0^2\xi_1'^2} - \frac{8\lambda_0^2\xi_2'^2}{\lambda_g'^2} - \frac{8\operatorname{tg}^2\theta}{\lambda_g'^2\xi_1'^2}\left(\frac{\lambda_g'}{2} - \lambda_0\xi_1'\right)\left(\frac{2\lambda_0}{\lambda_g'}\xi_2' - 1\right)\left[\left(\frac{\lambda_g'}{2} + \frac{2\lambda_0^2\xi_1'\xi_2'}{\lambda_g'}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2\lambda_0}{\lambda_g'}\xi_2' - 1\right)\left(\frac{\lambda_g'}{2} - \lambda_0\xi_1'\right)\frac{\lambda_0^2\operatorname{tg}^2\theta}{\lambda_g'^2}\right].$$

Произведенные при помощи (32) расчеты по определению вещественной части ε (сплошной цилиндр внутри спирали — идеальный диэлектрик) дали почти одинаковые результаты для различных значений $2l/d$, так как длина замедленной волны λ_g', как это легко проверить из (30), слабо зависит от $2l/d$.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. J. Fowler, IRE Trans., 1954, **4**, 3, 132.
2. M. Chodorow, E. L. Chu, J. Appl. Phys., 1955, **26**, 1, 33.
3. L. Stark, J. Appl. Phys., 1954, **25**, 9, 1155.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.
5. Н. Н. Смирнов, Докл. АН СССР, 1956, **108**, 2, 243.
6. Н. Н. Смирнов, Докл. АН СССР, 1956, **110**, 2, 212.
7. В. П. Шестопалов, Б. В. Кондратьев, Докл. АН СССР, 1959, **125**, 4, 794.
8. В. П. Шестопалов, Б. В. Кондратьев, ЖТФ, 1959, **29**, 12, 1215.
9. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 1955, **25**, 1, 158.
10. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 1958, **28**, 6, 1286.
11. Н. Н. Смирнов, ЖТФ, 1958, **28**, 7, 1494.
12. Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1959, 4, 166.
13. В. П. Шестопалов, К. П. Яцук, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 547.
14. Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, Изд. Советское радио, 1948.
15. S. Olving, Acta polytechn., Electr. Engng Ser., 1954, **6**, 3, 14.
16. Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 1958, **28**, 1, 183.
17. Б. З. Каценеленбаум, ЖТФ, 1954, **24**, 101, 1211.
18. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 2, 171.
19. Ю. И. Казначеев, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 6, 731.
20. В. В. Малин, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 1, 34.
21. H. G. Unger, Bell System Techn. J., 1958, **37**, 6, 1599.
22. С. Х. Коган, Докл. АН СССР, 1949, **66**, 5, 867.

Харьковский
государственный университет
им. А. М. Горького

Поступила в редакцию
26 V 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 4

ИСКАЖЕНИЯ СИГНАЛОВ В ЛИНИЯХ ЗАДЕРЖКИ

Д. Е. Вакман

Дано асимптотическое решение задачи об искажениях импульсов в цепочечных линиях задержки. Рассмотрены случаи видео-импульсов, радиоимпульсов и импульсов с линейно-изменяющейся частотой заполнения. Получены решения в виде асимптотических рядов и графиков. Приводится обобщение решения для произвольной линии передачи с дисперсионными свойствами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РАСЧЕТА

Известные расчеты переходных процессов в цепочечных линиях задержки [1, 2] определяют переходную проводимость схемы и позволяют, следовательно, найти форму выходного сигнала при прямоугольном импульсе на входе. Даже в этом простом случае решение получается путем численного интегрирования бесселевых функций и сравнительно трудоемко. Использование этих результатов для определения искажений сигналов другой формы (при помощи интеграла Дюамеля) обычно сопряжено с большими вычислительными трудностями. Между тем, во многих случаях необходима количественная оценка работы линии при сложном характере сигнала. В частности, в связи с некоторыми новыми применениями линий задержки актуальным является расчет искажений импульсов с изменяющейся частотой заполнения.

При таких расчетах следует учитывать, что малоискажающие линии состоят из весьма большого числа звеньев n, каждое из которых имеет сравнительно широкую полосу прозрачности и малое время задержки. Это допущение ($n \gg 1$) позволяет получить решение для произвольной формы сигнала асимптотическими методами.

Рассмотрим воздействие импульсного сигнала на бесконечную цепочку Т-образных звеньев, образующих линию задержки (рис. 1). Частотная характеристика такой схемы (для напряжения на выходе n-го звена) имеет вид [1]

$$Y(\omega) = \left(\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} - j\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n} = (\sqrt{1-z^2} - jz)^{2n} = e^{-j2n\arcsin z}, \qquad (1)$$

где $z = \omega/\omega_0$ — безразмерная частота; $\omega_0 = 2/\sqrt{LC} = 2n/T$ — граница полосы прозрачности линии; $T = n\sqrt{LC}$ — расчетное время задержки сигнала; L и C — индуктивность и емкость одного звена.

Характер искажения сигналов существенно зависит от длительности импульса и того, насколько несущая частота его близка к границе полосы прозрачности. Чтобы подчеркнуть это, запишем входное напряжение в виде

$$U_{\text{вх}}(t) = A(t/\tau)\, e^{j\omega_1 t} = A(\eta)\, e^{j\omega_1 \tau \eta}, \qquad (2)$$

где $\eta = t/\tau$ — безразмерное время; τ — длительность импульса; ω_1 — несущая частота; $A(\eta)$ — огибающая импульса, которая предполагается достаточно гладкой.

Для спектра входного напряжения получаем выражение

$$G(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{\text{вх}}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\eta)\, e^{j(\omega_1-\omega)\tau\eta}\, d\eta.$$

Выходной сигнал представляется в виде

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{\omega_0\tau}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\eta)\, e^{j\omega_1\tau\eta} \left(\sqrt{1-z^2} - jz\right)^{2n} e^{j\omega_0(t-\eta\tau)z}\, d\eta dz \qquad (3)$$

или, после замены переменной по формуле $z = \sin\xi$,

$$U_{\text{вых}} = \frac{\omega_0\tau}{2\pi} \iint\limits_{C-\infty}^{+\infty} A(\eta)\cos\xi e^{j\omega_1\tau\eta} e^{j2n\left(\frac{t-\eta\tau}{T}\sin\xi - \xi\right)}\, d\eta\, d\xi \qquad (4)$$

путь интегрирования C в комплексной ξ-плоскости показан на рис. 2).

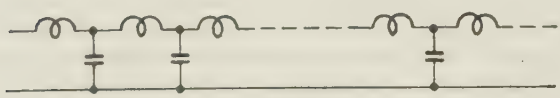


Рис. 1. Цепочечная линия задержки

Исследование интегралов (3) и (4) и составляет существо задачи. Во многих случаях формула (4), будучи представлена в виде

$$U_{\text{вых}} = \frac{\omega_0\tau}{2\pi} \iint\limits_{C-\infty}^{+\infty} F(\eta, \xi)\, e^{j2n\varphi(\eta,\xi)}\, d\eta\, d\xi, \qquad (5)$$

обладает той особенностью, что функция $F(\eta,\xi)$ является медленноменяющейся по сравнению с быстроосциллирующим вторым сомножителем подынтегрального выражения. В этих случаях выходное напряжение может быть приближенно найдено при помощи принципа стационарной фазы, точнее — его обобщения для двумерных интегралов [3, 4]. Применимость этого метода к многократным интегралам с комплексными пределами ин-

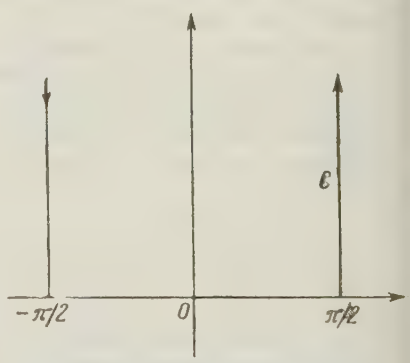


Рис. 2. Путь интегрирования в ξ-плоскости

теграции показана Бреммером [5, 6]. В соответствии с общей формулой метода [3, 5] напряжение на выходе линии имеет следующее асимптотическое представление, пригодное при большом числе ячеек:

$$U_{\text{вых}} = -\frac{\omega_0\tau}{j2n} \left\{ \frac{F(\eta_0, \xi_0)}{\sqrt{h_0}}\, e^{j2n\varphi(\eta_0, \xi_0)} + O\left(\frac{1}{2n}\right) \right\}. \qquad (6)$$

Здесь приняты обозначения:

$$h_0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\xi}\right)^2 \Bigg|_{\eta_0, \xi_0}, \qquad (7)$$

$_0$ и ξ_0 — координаты точки стационарной фазы, определяемые из системы равнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big|_{\eta_0,\,\xi_0}&=0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{\eta_0,\,\xi_0}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Асимптотическая формула (6) и дает приближенное значение выход-ого напряжения для случая одной точки стационарной фазы. Если в бласти интегрирования имеется несколько таких точек, необходимо взять умму соответствующих слагаемых.

Для некоторых сравнительно простых задач результаты, получаемые о формуле (6), имеют тривиальный характер и отражают процесс рас-пространения сигнала по идеальной линии с распределенными постоян-ыми ($n\to\infty$). Рассматривая такой результат как первое приближение, олучим в этих случаях необходимые поправки, представив решение в иде асимптотического ряда.

2. ИСКАЖЕНИЯ ВИДЕО-ИМПУЛЬСОВ

Если линия задержки используется для передачи видео-импульсов,), положив в уравнении (4) $\omega_1=0$ и сравнивая полученное выражение формулой (5), находим

$$F(\eta,\xi)=A(\eta)\cos\xi,\quad \varphi(\eta,\xi)=\frac{t-\eta\tau}{T}\sin\xi-\xi.$$

римем вначале, что длительность импульса достаточно велика и, сле-овательно, огибающая $A(\eta)=A(t/\tau)$ (а вместе с ней и $F(\eta,\xi)$) является едленноменяющейся. Уравнения (8) определяют в этом случае един твенную стационарную точку

$$\xi_0=0,\quad \eta_0=\frac{t-T}{\tau},$$

тя которой имеем

$$F(\eta_0,\xi_0)=A\left(\frac{t-T}{\tau}\right),\quad \varphi(\eta_0,\xi_0)=0,\quad h_0=-\frac{\tau^2}{T^2};$$

оэтому в соответствии с выражением (6)

$$U_{\text{вых}}=A\left(\frac{t-T}{\tau}\right)+O\left(\frac{1}{2n}\right)=U_{\text{вх}}(t-T)+O\left(\frac{1}{2n}\right).\tag{9}$$

Следовательно, предположив длительность импульса достаточно боль-ой, а огибающую его — плавной, мы в качестве первого приближения олучили, что сигнал в линии не искажается, а лишь задерживается на ремя $T=2n/\omega_0$. Ниже мы получим поправки к этому решению, учи-ывающие искажения формы импульса. Эти искажения становятся за-етными при уменьшении длительности импульса, когда огибающая его же не может считаться медленноменяющейся. Поэтому для выявления скажений сигнала нужно учесть изменения функции $F(\eta,\xi)$ в формуле (5).

Однако, в соответствии с принципом стационарной фазы, изменения «едленного» множителя могут существенно повлиять на результат лишь том случае, если эти изменения значительны вблизи стационарной точки. оэтому достаточно учесть поведение $A(\eta_l)$ только в окрестности точки $=(t-T)/\tau$; решение может быть получено путем разложения $A(\eta)$ в ряд Тейлора:

$$A(\eta_l)=A(\eta_0)+A'(\eta_0)(\eta_l-\eta_0)+\ldots+\frac{A^{(k)}(\eta_0)}{k!}(\eta_l-\eta_0)^k+\ldots.$$

Подставив этот ряд в выражение (4) и возвращаясь к переменной $z = \sin\xi$, формально получаем

$$U_{\text{вых}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{(k)}\left(\frac{t-T}{\tau}\right)\psi_k,\ \psi_k = \frac{\omega_0\tau}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(z)(\eta-\eta_0)^k e^{j\omega_0(t-\eta\tau)z}\,d\eta\,dz. \quad (1$$

Нетрудно заметить, что величины ψ_k представляют собой производны от вспомогательной функции

$$Q(\alpha) = \frac{\omega_0\tau}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(z)\,e^{j[\omega_0(t-\eta\tau)z+\alpha(\eta-\eta_0)]}\,d\eta\,dz,$$

которую можно вычислить, используя теорему о двойном интеграл Фурье. Находим

$$U_{\text{вых}} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{T/\tau}{j2n}\right)^k A^{(k)}\left(\frac{t-T}{\tau}\right)\frac{d^k}{dz^k}\left(Y(z)\,e^{j2nz}\right)|_{z=0}. \quad (1$$

Этот ряд и дает решение задачи. Учитывая уравнение (1), нетрудно по казать, что слагаемые, содержащие производные первого, второго и чет вертого порядков, в этой фор муле исчезают; в развернуто форме решение принимает вид

$$U_{\text{вых}} \sim$$
$$\sim A(\eta_0) + \frac{1}{6}\frac{(T/\tau)^3}{(2n)^2}A'''(\eta_0) -$$
$$-\frac{3}{40}\frac{(T/\tau)^5}{(2n)^4}A^{(5)}(\eta_0) + \ldots, \quad (1$$

где $\eta_0 = (t-T)/\tau$. Необходим отметить, что приведенный вы вод формулы (11) не може считаться корректным, так ка в ходе рассуждений использо вались расходящиеся интегра и допускались другие нестр гости. Однако этот результа можно получить более строг если в исходной формуле (или (4) деформировать пут интегрирования в комплексно η-плоскости и обеспечить экспо

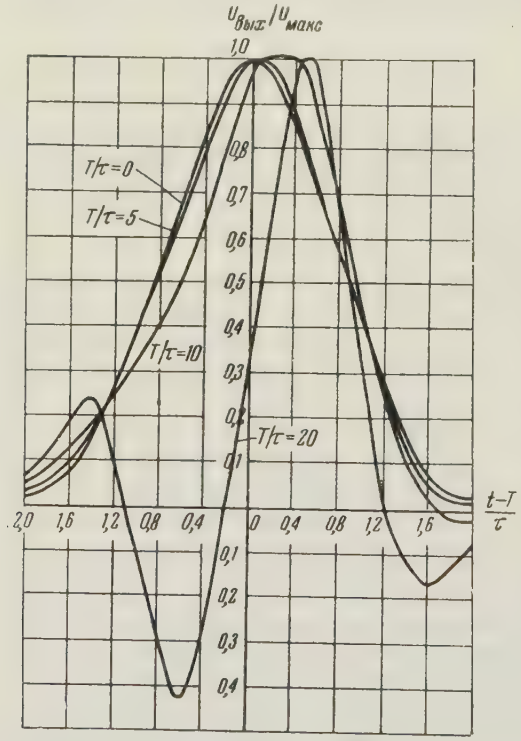


Рис. 3. Искажения «вероятностного» видео-импульса, $n = 30$

ненциальное затухание интегрируемой функции, а затем, проделав не обходимые преобразования, вернуться на действительную ось при вычис лении $Q(\alpha)$. Тогда можно показать, что ряд (11) равномерно сходится к искомому решению, если огибающая $A(t/\tau)$ — целая функция. Если же $A(t/\tau)$ — нецелая (но регулярная на действительной оси) функция, то применив теорему Ватсона [7], можно показать, что этот ряд является асимптотическим и сходится в смысле Пуанкаре.

В качестве примера по формуле (11′) был произведен расчет выходного напряжения для «вероятностного» импульса $U_{\text{вх}}(t) = e^{-t^2/\tau^2}$ и линии

стоящей из 30 ячеек. Результаты расчета показаны на рис. 3, где параетром каждой кривой является отношение времени задержки T к длильности импульса τ. Как видно из этого рисунка, удовлетворительная редача формы импульса имеет место при $T/\tau \leqslant 10$, что для выбранного сла ячеек соответствует условию $f_0 = \omega_0/2\pi \geqslant 1/\tau$.

3. ИСКАЖЕНИЯ РАДИОИМПУЛЬСОВ

Результаты предыдущего параграфа применимы к радиоимпульсам, ли в формулу (11) вместо $A(t/\tau)$ подставить $A(t/\tau)e^{j\omega_1 t}$.

Однако такой метод расчета целесообразен лишь в том случае, если $\ll \omega_0$ и спектр сигнала концентрируется на сравнительно низких частах. При увеличении несущей частоты множитель $e^{j\omega_1\eta\tau}$ в (4) становится истропеременным и в результате члены ряда (11) убывают медленно. ля решения задачи в этом случае представим выражение (4) в виде (5), ложив

$$F(\eta, \xi) = A(\eta)\cos\xi, \quad \varphi(\eta, \xi) = \frac{t-\eta\tau}{T}\sin\xi - \xi + \frac{\omega_1\tau\eta}{\omega_0 T}.$$

гда при помощи выражений (7) и (8) нетрудно получить

$$\sin\xi_0 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad \eta_0 = \frac{t - T\sec\xi_0}{\tau}, \quad h_0 = -\frac{\tau^2}{T^2}\cos^2\xi_0.$$

ормула (6) дает следующее представление выходного напряжения:

$$U_{\text{вых}} \sim A\left(\frac{t-T_1}{\tau}\right)e^{j\left(\omega_1 t - 2n \arcsin\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)}. \tag{12}$$

$$T_1 = T\sec\xi_0 = \frac{T}{\sqrt{1-\omega_1^2/\omega_0^2}}.$$

ак и при выводе формулы (9), мы предполагали, что импульс имеет доаточно плавную огибающую и длительность его велика. При этом в перм приближении получилось, что форма импульса не искажается, но держка его T_1 больше расчетной величины T. Это значит, что с повыением несущей частоты скорость распространения сигнала в линии уменьется. Такой результат требует некоторого обсуждения.

При указанном характере огибающей спектр сигнала занимает узкую олосу вблизи $\omega = \omega_1$. В линиях с распределенными постоянными такие игналы распространяются с групповой скоростью

$$V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\beta}\Big|_{\omega=\omega_1},$$

е β — фазовая постоянная. В нашем случае, выбирая в качестве единицы «длины» одну ячейку и обозначая через t_1 «групповое» время распространения по одной ячейке, можем записать

$$t_1 = \frac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_1}.$$

роме того, в соответствии с выражением (1) имеем $\beta = 2\arcsin\frac{\omega}{\omega_0}$; едовательно,

$$t_1 = \frac{2}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{n}\frac{T}{\sqrt{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}},$$

о и согласуется с формулой (12).

Следовательно, увеличение задержки сигнала связано с уменьшением «групповой» скорости при приближении несущей частоты к границе полосы пропускания. В этом смысле явления в линии задержки вполне аналогичны явлениям в волноводе.

Для выявления искажений формы импульса нужно, как и ранее, учесть изменения огибающей $A(\eta)$ вблизи стационарной точки $\eta_0 = (t-T_1)/\tau$. Для этого разложим $A(\eta)$ в ряд Тейлора и, поступая далее вполне аналогично выводу предыдущего параграфа, получим

$$U_{\text{вых}} = e^{j\omega_1(t-T_1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}\left(\frac{t-T_1}{\tau}\right)}{k!\,(j\omega_0\tau)^k} \frac{d^k}{dz^k}\left(Y(z)\, e^{j\omega_0 T_1 z}\right)\Big|_{z=\omega_1/\omega_0}, \tag{13}$$

причем T_1 дано формулой (12). Легко проверить, что в этом выражении исчезает слагаемое, содержащее первую производную, и в развернутой форме (13) принимает вид

$$U_{\text{вых}} = e^{j\left(\omega_1 t - 2n \arcsin\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)} \times$$

$$\times \left\{ A(\eta_0) + j\frac{1}{2}\frac{(T_1/\tau)^2}{2n}\frac{\omega_1/\omega_0}{\sqrt{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}} A''(\eta_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\frac{(T_1/\tau)^3}{(2n)^2}\left(1 + 3\frac{\omega_1^2/\omega_0^2}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}\right) A'''(\eta_0) + \ldots \right\}, \tag{13'}$$

где

$$\eta_0 = (t-T_1)/\tau;\quad T_1 = T \Big/ \sqrt{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}\,.$$

Эти результаты допускают обобщение для произвольной линии передачи, обладающей дисперсионными свойствами. Искажение сигналов в таких системах происходит за счет разной скорости распространения отдельных спектральных составляющих и накопления фазовых сдвигов на большой длине линии. К задачам такого рода относятся: передача сигналов по спиральным линиям задержки, распространение коротких импульсов в волноводах, искажения сигналов при зондировании ионосферы и т. д.

Основной характеристикой дисперсионной линии передачи является зависимость постоянной распространения от частоты:

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{V_\phi(\omega)}\,.$$

Если n — длина линии, то гармонические колебания получают при распространении фазовый сдвиг $n\beta(\omega)$, и выходной сигнал можно представить в виде

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{-jn\beta(\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\eta)\, e^{j[\omega_1 n\tau + \omega(t-\eta\tau) - n\beta(\omega)]}\, d\eta\, d\omega.$$

Этот интеграл аналогичен выражению (3); для его вычисления можно применить метод стационарной фазы, что дает

$$U_{\text{вых}} \sim A\left(\frac{t-T_1}{\tau}\right) e^{j[\omega_1 t - n\beta(\omega_1)]},$$

где $T_1 = n\left.\frac{d\beta}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_1}$. Следовательно, в первом приближении сигналы рас

остраняются без искажений с групповой скоростью, соответствующей сущей частоте.

Разложив $A(\eta)$ в ряд Тейлора и применяя теорему о двойном инте-але Фурье, можно получить уточнение этого решения:

$$U_{\text{вых}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{A^{(k)}\left(\frac{t-T_1}{\tau}\right)}{k!\,(j\tau)^k} e^{j[\omega_1 t - n\beta(\omega_1)]}, \tag{14}$$

$$a_k = e^{j(n\beta(\omega_1)-\omega_1 T_1)} \frac{d^k}{d\omega^k} e^{-j(n\beta(\omega)-\omega T_1)}\Big|_{\omega=\omega_1}.$$

рмулы (11) и (13) являются частными случаями этой зависимости, именяемой к любой линии передачи.

Ниже приводятся значения первых коэффициентов ряда (14) (все оизводные вычисляются для несущей частоты ω_1):

$$a_0 = 1 \qquad a_3 = -jn\beta'''$$
$$a_1 = 0 \qquad a_4 = -jn\beta^{(4)} - 3n^2(\beta'')^2$$
$$a_2 = -jn\beta'' \qquad a_5 = -jn\beta^{(5)} - 10n^2\beta''\beta'''$$
$$a_6 = -jn\beta^{(6)} - n^2(15\beta^{(4)}\beta'' + 10(\beta''')^2) + j15n^3(\beta'')^3.$$

рма коэффициентов и расчеты значительно упрощаются, если $\beta''(\omega_1) = 0$.) выполняется в тех случаях, когда групповая скорость стационарна и несущей частоты, т. е.

$$\frac{dV_{\text{гр}}}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_1} = 0.$$

енно такой случай «оптимального согласования» частоты сигнала с ией передачи и имеет место при распространении видео-импульсов линии задержки, образованной из фильтра нижних частот *.

4. ИСКАЖЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ С ЛИНЕЙНО-ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТОЙ ЗАПОЛНЕНИЯ

Случай импульсов с частотной модуляцией требует особого рассмотре-, так как ряд (13) пригоден лишь при неглубокой модуляции частоты, да множитель, характеризующий последнюю, может быть отнесен к ленноменяющейся комплексной огибающей импульса. Это имеет го в тех случаях, когда частотная модуляция вызывает незначительное ширение спектра сигнала.

Мы ограничимся рассмотрением линейного изменения частоты

$$\Omega_{\text{вх}} = \omega_1 + 2\gamma t,$$

агая, что ширина спектра сигнала определяется, главным образом, ми изменениями, а амплитудная огибающая является медленноменя-йся функцией времени.

Как нетрудно показать, интеграл задачи принимает тогда форму выра-ия (5), причем

$$F(\eta, \xi) = A(\eta)\cos\xi, \qquad \varphi(\eta, \xi) = \frac{t-\eta\tau}{T}\sin\xi - \xi + \frac{1}{\omega_0 T}(\omega_1\tau\eta + \gamma\tau^2\eta^2).$$

* Отметим любопытную формальную аналогию с одной задачей статистики: коэффи-ты a_k ряда (14) связаны с величинами $x_k = -jn\beta^{(k)}$ теми же соотношениями, которые жают центральные моменты некоторого распределения через его семи-инвари- [9].

Уравнения (8), определяющие точку стационарной фазы, в это случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{t-\eta_0\tau}{T}\cos\xi_0 - 1 &= 0, \\ \sin\xi_0 - \frac{\omega_1 + 2\gamma\tau\eta_0}{\omega_0} &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда следует

$$\eta_0 = \frac{t - T\sec\xi_0}{\tau}, \tag{1}$$

$$\sin\xi_0 + \frac{2\gamma T}{\omega_0}(\sec\xi_0 - 1) = \frac{\omega_1 - 2\gamma(t-T)}{\omega_0} = \frac{\Omega_{\text{вх}}(t-T)}{\omega_0}. \tag{1}$$

Отыскание точек стационарной фазы сводится, таким образом, к р шению трансцендентного уравнения (16). Параметр $2\gamma T/\omega_0$, входящ

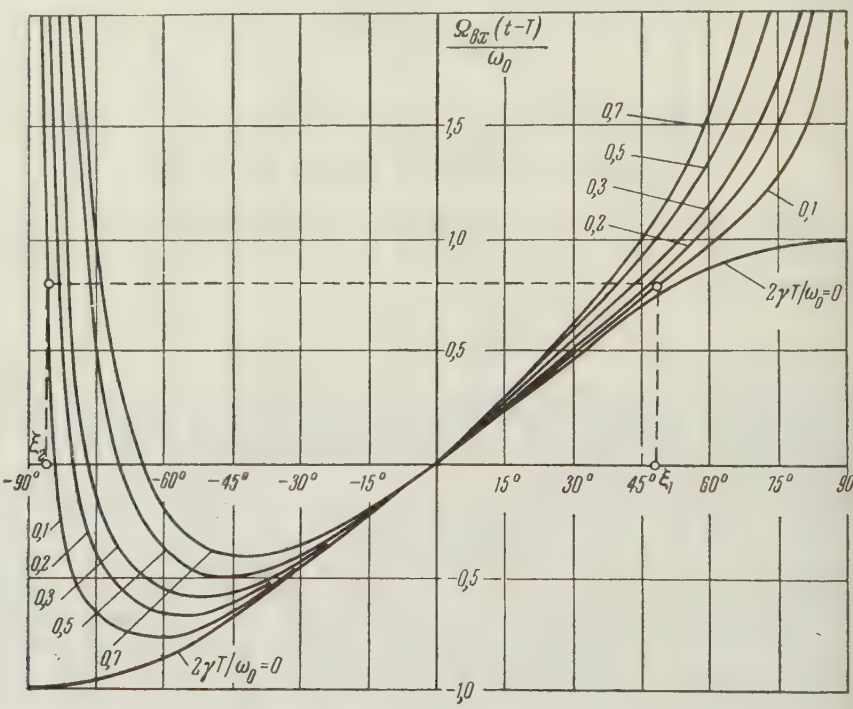


Рис. 4. Графическое решение уравнения (16)

в это уравнение, является мерой инерционности линии задержки по ношению к выбранной скорости изменения частоты, и малые искажен сигнала имеют место при малых значениях этого параметра. На рис приведена зависимость $\Omega_{\text{вх}}(t-T)/\omega_0$, построенная по уравнению (1 Основной интерес представляет отрезок времени, в течение котор частота передаваемого сигнала находится в полосе прозрачности лин

Это соответствует условию

$$0 \leqslant \frac{\Omega_{\text{вх}}(t-T)}{\omega_0} \leqslant 1.$$

Как показано на рис. 4, уравнение (16) имеет на этом участке корня: ξ_1 и ξ_2, которым соответствуют две точки стационарной ф (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2), поэтому выходное напряжение приближенно опр

ется суммой двух слагаемых:

$$U_{\text{вых}} \sim U_1 + U_2,$$

ждое из которых можно вычислить по формуле (6). Используя урав-ния (6), (7), (15) и (16), получаем следующее представление для каж-го из этих слагаемых:

$$U = \frac{A\left(\dfrac{t - T\sec\xi_0}{\tau}\right)}{\sqrt{1 + \dfrac{2\gamma T}{\omega_0}\dfrac{\sin\xi_0}{\cos^3\xi_0}}}\, e^{\,j\left\{\frac{\omega_0^2}{4\gamma}\left(\sin^2\xi_0 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) + \omega_0 T(\operatorname{tg}\xi_0 - \xi_0)\right\}}. \qquad (17)$$

Для определения U_1 или U_2 нужно подставить в это выражение есто ξ_0 соответствующий корень уравнения (16): ξ_1 или ξ_2.

Выясним физический смысл напряжений U_1 и U_2. Мгновенная частота ждого напряжения может быть определена из выражения (17) по рмуле

$$\Omega_{\text{вых}}(t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\omega_0^2}{4\gamma}\left(\sin^2\xi_0 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) + \omega_0 T(\operatorname{tg}\xi_0 - \xi_0)\right\} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2\gamma}\sin\xi_0\cos\xi_0\left(1 + \frac{2\gamma T}{\omega_0}\frac{\sin\xi_0}{\cos^3\xi_0}\right)\frac{d\xi_0}{dt}.$$

о из уравнения (16) нетрудно получить

$$\frac{dt}{d\xi_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma}\cos\xi_0\left(1 + \frac{2\gamma T}{\omega_0}\frac{\sin\xi_0}{\cos^3\xi_0}\right),$$

следовательно,

$$\frac{\Omega_{\text{вых}}(t)}{\omega_0} = \sin\xi_0, \qquad (18)$$

Корни уравнения (16) (которые нужно подставить в выражение (18) есто ξ_0) являются функциями времени, поэтому U_1 и U_2 представляют бой напряжения с изменяющейся частотой. Характер этих изменений трудно качественно установить из рассмотрения рис. 4. При относи-льно низкой частоте входного сигнала ($\Omega_{\text{вх}}(t - T)/\omega_0 \ll 1$) величина ξ_1 чти линейно зависит от $\Omega_{\text{вх}}$ и в этой области

$$\xi_1 \simeq \sin\xi_1 \simeq \frac{\Omega_{\text{вх}}}{\omega_0},$$

этому, согласно формуле (18), мгновенная частота напряжения U_1 риблизительно равна частоте входного сигнала. В этих же условиях при малой инерционности системы ($2\gamma T/\omega_0 \ll 1$) значение ξ_2 близко $-\pi/2$, точнее

$$\xi_2 \simeq -\frac{\pi}{2} + \frac{2\gamma T}{\omega_0 + \Omega_{\text{вх}} + 2\gamma T},$$

этому, согласно (18), мгновенная частота напряжения U_2 близка к раничной частоте линии ω_0.

Эти соображения показывают, что напряжение U_1 примерно соответ-вует вынужденным колебаниям на выходе линии, а напряжение U_2 — бственным колебаниям. Мы установили, следовательно, физическую терпретацию двух частей выходного напряжения, выявленных мето-м стационарной фазы. Из рис. 4 также следует, что по мере повышения стоты сигнала мгновенная частота напряжения U_1 отклоняется от стоты на входе и при $\Omega_{\text{вх}} \gg \omega_0$ также приближается к граничной частоте нии ($\xi_1 \to \pi/2$), поэтому в те отрезки времени, когда частота сигнала ачительно удалена от полосы прозрачности, колебательный процесс оисходит с частотой ω_0. Этот факт нетрудно объяснить из физических ображений.

Для малоискажающих линий задержки существенно оценить отно сительную величину собственных колебаний, которые накладываются на передаваемый сигнал. Используя для этой цели вышеприведенные приближенные значения ξ_1 и ξ_2, из уравнения (17) можно получить

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right| \simeq \frac{1}{3}\,\frac{2\gamma T}{\omega_0}\,\frac{A\left(-\frac{\omega_0}{2\gamma\tau}\right)}{A(0)}.$$

Для «вероятностного» импульса это соотношение принимает вид

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right| \simeq \frac{1}{3}\,\frac{2\gamma T}{\omega_0}\,e^{-\omega_0^2/4\gamma^2\tau^2}.$$

Отсюда следует, что при малой инерционности системы ($2\gamma T/\omega_0 < 0{,}5$) относительная величина собственных колебаний обычно не превышает нескольких процентов и выходной сигнал практически определяется напряжением U_1.

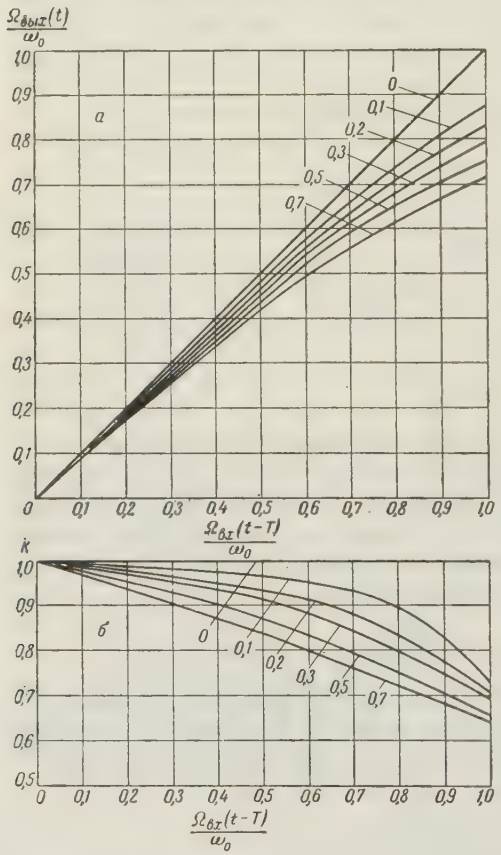


Рис. 5. Зависимость мгновенной частоты и приведенной амплитуды выходного сигнала от мгновенной частоты сигнала на входе

Основные параметры сигнала при этом нетрудно найти из полученных соотношений.

В самом деле, зависимость мгновенной частоты выходного сигнала от частоты сигнала на входе линии определяется уравнениями (16) и (18), которые следует рассматривать как параметрическое задание соответствующей кривой. Это позволяет построить необходимые графики, не прибегая к численному решению трансцендентного уравнения (16). Такие графики приведены на рис. 5,*а*.

Амплитуда выходного напряжения в соответствии с уравнением (17) определяется выражением

$$A_{\text{вых}}(t) = \frac{A\left(\frac{t - T\sec\xi_0}{\tau}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2\gamma T}{\omega_0}\,\frac{\sin\xi_0}{\cos^3\xi_0}}}.$$

Эта формула показывает, что искажения огибающей не определяются однозначно частотой сигнала, а зависят также от формы импульса. При малой инерционности системы и достаточно плавной огибающей расчет искажений амплитуды можно упростить и привести последнюю формулу к виду

$$K = \frac{A_{\text{вых}}(t)}{A_{\text{вх}}(t - T_\Omega)} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\gamma T}{\omega_0}\,\frac{\sin\xi_0}{\cos^3\xi_0}}}, \qquad (19$$

где

$$T_\Omega = T\left/\sqrt{1 - \frac{\Omega_{\text{вх}}^2(t - T)}{\omega_0^2}}\right.$$

— групповое время задержки сигнала для мгновенной частоты.

Приведенная амплитуда K характеризует дополнительные искажения ибающей по сравнению с квазистационарными изменениями ее, имею-ими место при весьма медленном изменении частоты. Зависимость при-еденной амплитуды от частоты входного сигнала, заданная параметри-ески уравнениями (16) и (19), показана на рис. 5,*б*.

Графики рис. 5 и определяют количественно искажения в линии за-ержки импульсного сигнала с линейно-изменяющейся частотой.

5. НЕСОГЛАСОВАННАЯ ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Изложенная теория справедлива для бесконечной линии задержки, е. для идеализированной, неосуществимой схемы. Эта общепринятая деализация во многих случаях оправдана. Однако известный интерес редставляет возможность применения изложенного метода к реальным иниям с конечным числом звеньев и произвольными нагрузками на кон-ах.

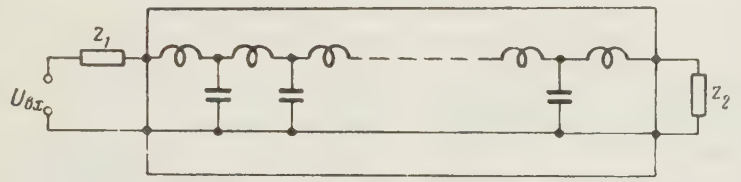


Рис. 6. Линия задержки с конечным числом звеньев

Рассматривая линию в схеме рис. 6 как четырехполюсник, можно олучить следующее выражение для коэффициента передачи схемы:

$$Y(\omega) = \frac{2Z_cZ_1}{(Z_c+Z_1)(Z_c+Z_2)} e^{-j2n \arcsin\frac{\omega}{\omega_0}} \frac{1}{1-\Gamma_1\Gamma_2 e^{-j4n \arcsin\frac{\omega}{\omega_0}}}, \qquad (20)$$

де $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$ — характеристическое сопротивление; $\Gamma_1 = (Z_c - Z_1)/(Z_c + Z_1)$, $\Gamma_2 = (Z_c - Z_2)/(Z_c + Z_2)$ — коэффициенты отражения. ледуя работе [8], представим последний сомножитель в выражении (20) ак сумму геометрической прогрессии. Тогда получим

$$Y(\omega) = \frac{2Z_cZ_2}{(Z_c+Z_1)(Z_c+Z_2)} \sum_{m=0}^{\infty} (\Gamma_1\Gamma_2)^m e^{-j(2m+1)2n \arcsin\frac{\omega}{\omega_0}},$$

одставив это значение в уравнения (3) и (4), найдем

$$U_{вых} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_0\tau}{2\pi} \int_{C-\infty}^{+\infty} \frac{2Z_cZ_2(\Gamma_1\Gamma_2)^m}{(Z_c+Z_1)(Z_c+Z_2)} \times$$

$$\times A(\eta)\cos\xi\, e^{j\omega_1\tau\eta} e^{j2n\left(\frac{t-\eta\tau}{T}\sin\xi-(2m+1)\xi\right)} d\eta\, d\xi. \qquad (21)$$

Это выражение имеет простое физическое истолкование. Сравнивая ормулы (21) и (4), легко заметить, что каждый из интегралов представ-яет напряжение, подобное входному, но задержанное на время $(2m+1)T$; оэтому мы получили выходное напряжение как суперпозицию волн, озникающих при многократных отражениях от нагрузок. Относительная еличина последующих волн определяется в основном коэффициентами тражения Γ_1 и Γ_2. Для определения формы напряжения каждой волны ужно вычислить соответствующий интеграл в уравнении (21) подобно ому, как сделано выше для бесконечной цепочки. Дополнительные мно-кители, имеющиеся в (21), могут обычно рассматриваться как медленно-еняющиеся и не приводят к значительным усложнениям расчета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен метод расчета искажений импульсных сигналов в цепочечной линии задержки. Асимптотический характер решений предполагает, что число звеньев линии достаточно велико и линия приближается по своим свойствам к системе с распределенными постоянными. Такое допущение оправдано для малоискажающих линий с широкой полосой прозрачности или, что то же самое, для сигналов, близких к монохроматическим,— т. е. во всех практических задачах, когда цепочечные линии используются взамен идеальных. Асимптотические ряды (11), (13), (14), выражающие общее решение, удобны для оценки малых искажений сигналов; применение этих рядов к расчету сильных искажений нецелесообразно.

Метод расчета позволяет также охватить случай импульсов с изменяющейся частотой заполнения и довести решение до несложных расчетных кривых.

Существенно отметить, что во всех рассмотренных случаях удалось получить численные результаты, не прибегая к сложным вычислениям. Это выгодно отличает данный метод от предложенного в работе [8], в которой окончательные результаты получены в виде сложных интегралов, содержащих бесселевы функции и спектр сигнала.

Развитая теория неприменима к импульсам с нерегулярной огибающей, например к прямоугольному импульсу. Можно показать, что в этом случае основной интеграл задачи имеет форму выражения (5), но конечные пределы интеграции. В результате решение содержит дополнительные члены, связанные с контурным интегралом [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Круг, Переходные процессы в линейных электрических цепях, ГЭИ, 1948.
2. М. И. Конторович, Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, ГТТИ, 1953.
3. М. И. Конторович, Ю. К. Муравьев, Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задачи дифракции. ЖТФ, 1952, **22**, 3, 394.
4. G. Braun, Zur Metode der Stationären Phase, Acta phys. austriaca, 1956, **10**, 1—2, 18.
5. H. Bremmer, Terrestrial radio waves, 1949, N. Y., 20—28.
6. H. Bremmer, Propagation of electromagnetic waves, Handbuch der Physik, 1958, **16**, 444.
7. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958, стр. 448—450.
8. Б. В. Елизаров, Г. Н. Крылов, Г. И. Макаров, Асимптотические методы вычисления переходного процесса в фильтрах низких частот, Радиотехника, 1959, **14**, 2, 63.
9. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, 1948, стр. 210.

Поступила в редакцию
29 VI 1959

КОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ n ОДИНАКОВЫХ НЕОБРАТИМЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Л. Р. Явич

Приводятся матричные соотношения, позволяющие вычислять матрицы передачи каскадного соединения n одинаковых четырехполюсников независимо от выполнения условия обратимости и структуры четырехполюсников. Формулы справедливы как при классической, так и при волновой трактовке явлений.

ВВЕДЕНИЕ

Вычисление матрицы передачи результирующего четырехполюсника и наличии каскадного соединения n одинаковых четырехполюсников изано с возведением матрицы одиночного составляющего четырехполюика в n-ю степень.

Классический метод возведения матрицы в степень требует отыская корней характеристической функции (собственных значений матрицы) последующей диагонализацией возводимой в степень матрицы. Такая следовательность выполнения математических операций оказывается статочно трудоемкой.

Предложено матричное соотношение, позволяющее возводить матрицу ратимого четырехполюсника в n-ю степень непосредственно [1]. Это отношение удачно сочетается с новым элементом теории цепей — идеальм преобразователем мощности (ИПМ), введенным Э. В. Зеляхом [2]. деление ИПМ преобразует необратимый четырехполюсник в обратий и делает возможным применение формул возведения в степень в щем случае необратимого четырехполюсника.

В данной работе полученные результаты обобщаются и применяются к для обычных матриц передачи, так и для нормированных и волнок.

1. ВЫДЕЛЕНИЕ В НЕОБРАТИМЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАХ ОБРАТИМОЙ ЧАСТИ И ИПМ

Рассмотрим каскадное соединение n одинаковых четырехполюсников, ждый из которых описывается матрицей $[X]$ (рис. 1). При этом под] можно понимать любую из матриц $[a]$, $[A]$ и $[T]$. В общем случае ырехполюсник может быть необратимым и содержать как активные, и реактивные элементы, поэтому [3] он определяется четырьмя комксными элементами матрицы $[X]$.

Матрица $[a]$ связывает токи и напряжения на входе и выходе четырехюсника (рис. 2) следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

При этом все ее элементы полностью определяются свойствами лишь ого четырехполюсника. В то же время элементы нормированной матцы $[a]$, обозначаемой $[A]$, определяются не только структурой четырехюсника, но и активными сопротивлениями $R_г$ и $R_н$ ($R_г$—внутреннее ротивление генератора; $R_н$— сопротивление нагрузки).

В соответствии с [4] запишем:

$$\begin{bmatrix} U_1^{\text{н}} \\ I_1^{\text{н}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^{\text{н}} \\ I_2^{\text{н}} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_2^{\text{н}} \\ I_2^{\text{н}} \end{bmatrix},$$

где нормированные токи и напряжения связаны с ненормированными ве личинами, обозначенными на рис. 2, следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} U_1^{\text{н}} &= \frac{U_1}{\sqrt{R_{\text{г}}}}, \quad I_1^{\text{н}} = I_1 \sqrt{R_{\text{г}}}, \\ U_2^{\text{н}} &= \frac{U_2}{\sqrt{R_{\text{н}}}}, \quad I_2^{\text{н}} = I_2 \sqrt{R_{\text{н}}} \end{aligned}\right\}$$

и соответственно элементы матриц

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= a_{11} \sqrt{\alpha}, \qquad A_{12} = \frac{a_{12}}{\sqrt{R_{\text{г}}}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \\ A_{21} &= a_{21} R_{\text{г}} \sqrt{\alpha}, \quad A_{22} = \frac{a_{22}}{\sqrt{\alpha}}, \end{aligned}\right\}$$

при этом $\alpha = R_{\text{н}} / R_{\text{г}}$.

При волновой трактовке явлений удобно пользоваться матрицей пе редачи $[T]$, которая связывает между собой нормированные волны на пряжения на входе и выходе четырехполюсника (рис. 3). Согласно [4

$$\begin{bmatrix} U_{1\text{п}}^{\text{н}} \\ U_{1\text{о}}^{\text{н}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2\text{п}}^{\text{н}} \\ U_{2\text{о}}^{\text{н}} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} U_{2\text{п}}^{\text{н}} \\ U_{2\text{о}}^{\text{н}} \end{bmatrix},$$

где

$$\left.\begin{aligned} U_{1\text{п}}^{\text{н}} &= \frac{U_{1\text{п}}}{\sqrt{R_{\text{г}}}}, \quad U_{1\text{о}}^{\text{н}} = \frac{U_{1\text{о}}}{\sqrt{R_{\text{г}}}}, \\ U_{2\text{п}}^{\text{н}} &= \frac{U_{2\text{п}}}{\sqrt{R_{\text{н}}}}, \quad U_{2\text{о}}^{\text{н}} = \frac{U_{2\text{о}}}{\sqrt{R_{\text{п}}}}. \end{aligned}\right\}$$

Следует заметить, что в технике СВЧ, где подводящие линии имеют размеры, соизмеримые с длиной волны, вместо сопротивлений $R_{\text{г}}$ и R применяют волновые сопротивления ρ_1 и ρ_2 подводящих линий без потер

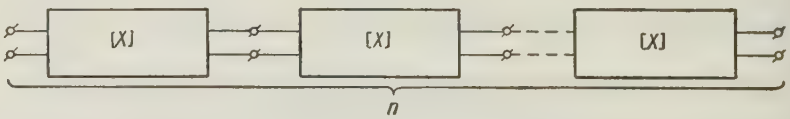


Рис. 1. Каскадное соединение n одинаковых четырехполюсников (необратимых)

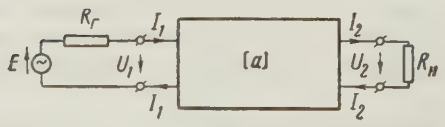


Рис. 2. Полная схема передачи энергии

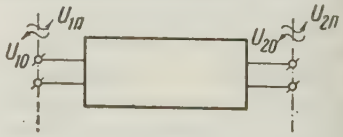


Рис. 3. Падающие и отраженные волны напряжения

Связь между матрицами $[T]$ и $[A]$ определяется соотношением

$$[T] = [\alpha]^{-1} [A] [\alpha], \qquad (1$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матричное равенство (1) свидетельствует об общности многих свойс матриц $[T]$ и $[A]$.

В частности,

$$|T| = |A| = |a| = |X|,$$

$$[T]^n = ([\alpha]^{-1}[A][\alpha])^n = [\alpha]^{-1}\underbrace{[A][\alpha][\alpha]^{-1}[A][\alpha]}_{n\text{ раз}}\ldots = [\alpha]^{-1}[A]^n[\alpha].$$

Зададимся целью выделить в необратимом четырехполюснике с матрицей $[X]$ обратимую часть, описываемую матрицей $[X_0]$. Используя ПМ [2], получим

$$[X] = [X_0]\frac{1}{k}, \tag{2}$$

где

$$[X_0] = \begin{bmatrix} X_{110} & X_{120} \\ X_{210} & X_{220} \end{bmatrix},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{|X|}}. \tag{3}$$

Коэффициент k называют коэффициентом преобразования. Из (3) видно, что k является обычным числом (в общем случае комплексным), действия над которым регламентируются законами элементарной алгебры.

В соответствии с (2) запишем

$$[X]^n = [X_0]^n\frac{1}{k^n} = [X_0]^n k^{-n},$$

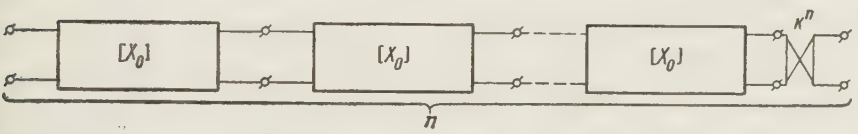


Рис. 4. Каскадное соединение n обратимых четырехполюсников и ИПМ

Иными словами, каскадное соединение из n одинаковых необратимых четырехполюсников эквивалентно каскадному соединению n обратимых четырехполюсников и ИПМ с коэффициентом преобразования k^n (рис. 4).

2. КАСКАДНОЕ СОЕДИНЕНИЕ n ОБРАТИМЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

После введения ИПМ задача сводится к отысканию результирующей матрицы передачи каскадного соединения из n одинаковых обратимых четырехполюсников. Заметим, что для каждого из составляющих четырехполюсников

$$|X_0| = X_{110}X_{220} - X_{120}X_{210} = 1, \tag{4}$$

потому матрица $[X_0]$ полностью определяется тремя ее комплексными элементами [3]. По аналогии с [1] запишем

$$[X_0]^n = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} nU + \sigma \operatorname{sh} nU & \mu\sqrt{1-\sigma^2}\operatorname{sh} nU \\ \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\sigma^2}\operatorname{sh} nU & \operatorname{ch} nU - \sigma \operatorname{sh} nU \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} U &= \frac{1}{2}(X_{110} + X_{220}) \\ \sigma \operatorname{sh} U &= \frac{1}{2}(X_{110} - X_{220}), \\ \mu^2 &= \frac{X_{120}}{X_{210}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Некоторые упрощения в структуре матриц могут быть получены в том случае, если четырехполюсник симметричен:

$$\left.\begin{aligned} A_{110} &= A_{220} = a_{110} = a_{220}, \\ T_{120} &= -T_{210}. \end{aligned}\right\}$$

Тогда равенства (6) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} U &= a_{110}, \\ \sigma &= 0, \\ \mu^2 &= \frac{a_{120}}{a_{210}} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} U &= \frac{1}{2}(T_{110} + T_{220}), \\ \sigma \operatorname{sh} U &= \frac{1}{2}(T_{110} - T_{220}), \\ \mu &= j = \sqrt{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Теперь выражение (5) можно переписать в виде

$$[a_0]^n = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} nU & \mu \operatorname{sh} nU \\ \frac{1}{\mu} \operatorname{sh} nU & \operatorname{ch} nU \end{bmatrix} \tag{9}$$

или

$$[T_0]^n = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} nU + \sigma \operatorname{sh} nU & j\sqrt{1-\sigma^2} \operatorname{sh} nU \\ -j\sqrt{1-\sigma^2} \operatorname{sh} nU & \operatorname{ch} nU - \sigma \operatorname{sh} nU \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Как и следовало ожидать, для матриц (9) и (10) соблюдаются условия обратимости и симметрии.

При наличии у составляющего четырехполюсника вертикальной симметрии относительно вертикальной оси он может быть разбит на два зеркально-отображающих четырехполюсника (рис. 5). При этом правая половина четырехполюсника по существу соответствует левой

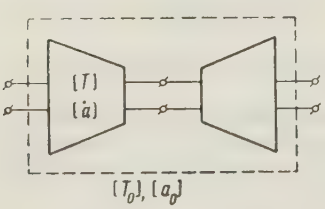


Рис. 5. Выделение левой половины вертикально симметричного четырехполюсника

у которой изменено направление передачи энергии. Действуя аналогично [5,6], получим

$$[a_0] = \begin{bmatrix} 1 + 2a_{12}a_{21} & 2a_{11}a_{12} \\ 2a_{21}a_{22} & 1 + 2a_{12}a_{21} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Соответственно

$$[T_0] = \begin{bmatrix} T_{11}^2 - T_{12}^2 & -T_{11}T_{21} + T_{12}T_{22} \\ T_{11}T_{21} - T_{12}T_{22} & -T_{21}^2 + T_{22}^2 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} — элементы матриц левой половины симметричного четырехполюсника.

Преобразуя выражения (7) и (8) с учетом (11) и (12), получим

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} U &= 1 + 2a_{12}a_{21}, \\ \mu^2 &= \frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} U &= \frac{1}{2}(T_{11}^2 - T_{12}^2 - T_{21}^2 + T_{22}^2), \\ \sigma \operatorname{sh} U &= \frac{1}{2}(T_{11}^2 - T_{12}^2 + T_{21}^2 - T_{22}^2). \end{aligned}\right\}$$

На основании изложенного приходим к заключению, что для вычи-ления матрицы передачи каскадного соединения n одинаковых четырех-олюсников, обладающих поперечной симметрией, достаточно знать атрицу одной лишь левой половины четырехполюсника.

ЛИТЕРАТУРА

W. P. Wilson, Some matrix theorems, Electronic and Radio Engineer (new series), 1957, **34**, 6, 229.

Э. В. Зелях, Идеальный преобразователь мощности — новый элемент электрической схемы, Электросвязь, 1957, 1, 35.

А. Л. Фельдштейн, О минимальном числе параметров, определяющем пассивный четырехполюсник, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 5, 755.

Л. Р. Явич, Волновые матрицы четырехполюсника, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 7, 870.

Э. В. Зелях, Теория перегиба симметричных четырехполюсников, Изв. электропромышл. слабого тока, 1936, 6, 7.

Л. Р. Явич, Применение волновых матриц для расчета четырехполюсников с поперечной симметрией, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 2, 341.

Поступила в редакцию
16 II 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 4

ВЛИЯНИЕ АПЕРТУРЫ ПУЧКА НА КОММУТАЦИЮ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РЕЛЬЕФА В ВИДИКОНЕ*

С. Б. Гуревич, Р. Е. Быков

Приводятся экспериментальные данные, характеризующие апертуру пучка в видиконе. Экспериментально показано, что время накопления при стандартном разложении в видиконе не превышает времени развертки одного поля (1/50 *сек*). Приводятся результаты, характеризующие отклонение электронного пучка под действием потенциального рельефа.

ВВЕДЕНИЕ

В видиконе, как и во всякой другой телевизионной передающей трубке, коммутирующий пучок обладает малыми, но конечными размерами сечения, которые определяют целый ряд качественных показателей телевизионного изображения. Апертура пучка, характеризуемая его сечением в плоскости накопителя, не остается неизменной при взаимодействии пучка с накопленным зарядом. Поэтому следует учитывать «действующую апертуру пучка», характеризуемую участком поверхности слоя, на котором пучок в течение времени, равного условному времени коммутации одного элемента, производит изменение потенциала, приводящее к созданию тока сигнала на выходе трубки. Указанный участок поверхности не имеет резкой границы, поэтому действующая апертура может быть определена лишь с известной точностью, если границы участка определить условием малого (не превышающего заданную величину) изменения потенциала слоя вне этих границ за время коммутации одного элемента.

Знание действующей апертуры пучка необходимо для определения предельной разрешающей способности, обеспечиваемой данной трубкой, а также для определения инерционности и чувствительности трубки. Действительно, в случае если размеры действующей апертуры пучка превышают высоту строки, происходит одновременная коммутация элементов на соседних строках, что приведет не только к потере разрешающей способности, но также к сокращению времени накопления и уменьшению величины зарядов, накопленных на соседних строках в случае чересстрочной коммутации. Вместе с изменением эффективности коммутации это приводит к изменению чувствительности и инерционности.

В случае коммутации пучком медленных электронов размеры и форма действующей апертуры пучка определяются главным образом тремя факторами: 1) условиями фокусировки пучка в плоскости слоя; 2) условиями протекания процесса коммутации в течение условного времени передачи элемента, связанными с изменением эффективности пучка в процессе коммутации; 3) действием на электронный пучок полей потенциального рельефа, соответствующих соседним строкам и элементам, вследствие чего действующая апертура (ее форма и размер) зависит от формы и глубины потенциального рельефа.

Чтобы оценить изменение действующей апертуры пучка, необходимо, следовательно, учесть все перечисленные факторы.

---

* Доложено на XIV конференции Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова, Ленинград, 21/IV 1959 г.

Можно предполагать, что изменение действующей апертуры и неко-ые особенности коммутации аналогичны для видикона, работающего ежиме коммутации пучком медленных электронов, и суперортикона. я суперортикона установлено, что высота действующей апертуры пучка льшинстве случаев значительно превышает высоту строки [1], в то время размер сечения пучка, не подвергавшегося действию потенциального льефа в плоскости накопителя, может быть меньше высоты строки В случае чересстрочной развертки период, в течение которого накап-ается заряд, может оказаться при этом равным времени полукадра, е времени кадра, как получилось бы, если бы пучок коммутировал на-ленный заряд только с одной строки. Известно также, что при пере-е суперортиконом сильно освещенного участка его размеры увели-аются по сравнению с теми, которые имели бы место при меньшей осве-ности того же участка [3]. Это расширение объясняют тем, что пучок, ходя мимо светлого участка с высоким потенциалом, отклоняется одулируется уже при прохождении элементов, находящихся вне осве-ного участка.

Представляет интерес выяснить, имеют ли место те же явления при ра-е видикона в условиях $\sigma < 1$. Кроме того, в настоящей работе ставилась ача определения величины потенциального рельефа в рабочем режиме бки.

1. ОЦЕНКА РАЗМЕРА ДЕЙСТВУЮЩЕЙ АПЕРТУРЫ ПУЧКА В ВИДИКОНЕ

Размер действующей апертуры пучка удобно характеризовать отно-нием диаметра пучка D к шагу строки $\delta_0 = h_0/z_{ak}$, т. е. D/δ_0 [4] (h_0— сота растра, z_{ak} — число видимых строк, укладывающихся в h_0). иболее простыми условиями, в которых возможно определение апертуры ка, являются условия коммутации одиночной строки, когда спереди, рху и снизу коммутируемого элемента потенциал участков оказы-тся приблизительно одинаковым. Эти условия были осуществлены сле-ющим образом: в промежуток времени обратного хода по кадру пучок ользовался в качестве записывающего, а в промежуток времени прямого да по кадру — в качестве коммутирующего. Во время обратного хода ровой развертки генератор строчной развертки обычно продолжает ю работу, и если коммутирующий пучок при этом не запирается, он черчивает на поверхности мишени несколько строк под некоторым ом к строкам, прочерчиваемым в промежуток времени прямого хода ровой развертки.

Если слой видикона освещен равномерно, то на поверхности слоя, ащенной к прожектору, накапливается заряд, разный для разных стков (в зависимости от времени, прошедшего после начала накопления данном участке). Пучок, прошедший в момент обратного хода кадровой вертки по слою, записывает свой след в виде узкой полоски в соответ-ии с действующей апертурой пучка в условиях коммутации единствен-строки. Во время своего движения на прямом ходу кадровой развертки пучок, пересекая след своего движения на обратном ходу, создает сиг-на выходе трубки, осциллограмма которого приведена на рис. 1. хняя осциллограмма соответствует наилучшей фокусировке, нижняя — колько расфокусированному пучку.

Для того чтобы уменьшить влияние пучка, коммутирующего сосед-строки, на величину скоммутированного заряда, вертикальный мер растра увеличивали примерно в 2—3 раза. Сигнал, формируе-й трубкой при пересечении следа, оставленного пучком на обратном у, является следствием сложного наложения апертуры следа и апер-ы пучка в процессе коммутации. Если предположить, что пучок ет аксиальную симметрию и зафиксировать длительность коммута-по максимальной ширине сигнала на осциллограмме рис. 1, то,

зная угол пересечения пучком своего следа (φ), можно определить дей ствующую апертуру пучка из следующего простого соотношения:

$$D = \frac{A}{2}\sin\varphi, \qquad (1$$

где A — максимальная ширина сигнала при пересечении следа.

При анализе полученных результатов следует учитывать, что эффек тивность коммутации определенной точки поверхности мишени умень

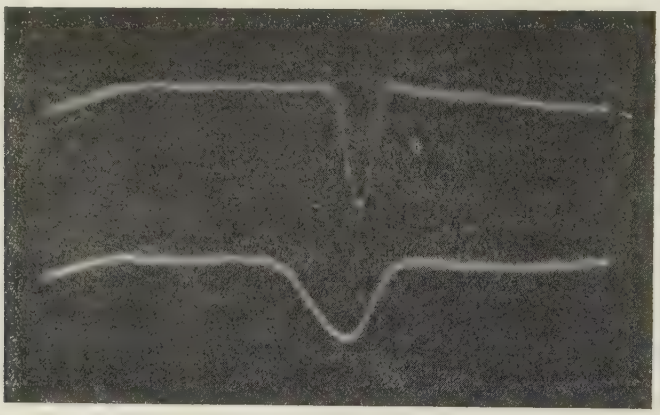


Рис. 1

шается по мере движения пучка над этой точкой [5]. Это может привес к условиям, когда процесс коммутации практически закончится (о че можно судить по отсутствию на выходе трубки сигнала, соответствующе данной точке мишени) до момента прохождения задней границы над данно точкой мишени. При этом диаметр пучка, определенный по формуле (1 окажется несколько заниженным. Влияние указанного фактора можн уменьшить, коммутируя сравнительно большой потенциальный рельеф в условиях, когда ток пучка недостаточен для полного снятия заряда. О

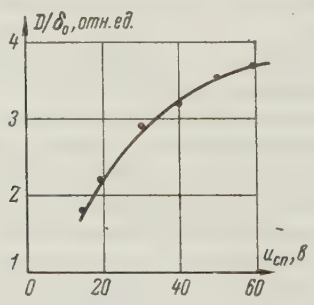


Рис. 2

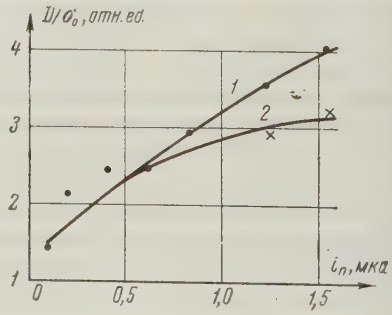


Рис. 3

нако при этом более заметным окажется увеличение апертуры под дей ствием потенциального рельефа.

Были проведены измерения действующей апертуры пучка при разли ной эффективности накопления (при различных потенциалах сигнал ной пластины). Результаты измерений, проведенных при следующих усл виях: освещенность 25 *лк*, потенциал первого анода $u_{a1} = 300$ потенциал второго анода $u_{a2} = 285$ *в*, ток пучка $i_п = 0{,}62$ *мка*, показан на рис. 2. Приведенные результаты измерений относятся к центрально

асти растра. Очевидно, что на краях апертура пучка несколько больше,
На рис. 3 приведена зависимость действующей апертуры от тока пучка
когда не производится подфокусировка — кривая *1* и когда при увели-
ении тока пучка производится подфокусировка — кривая *2*). Измерения
роведены при потенциале сигнальной пластины 25 *в*. Из графиков

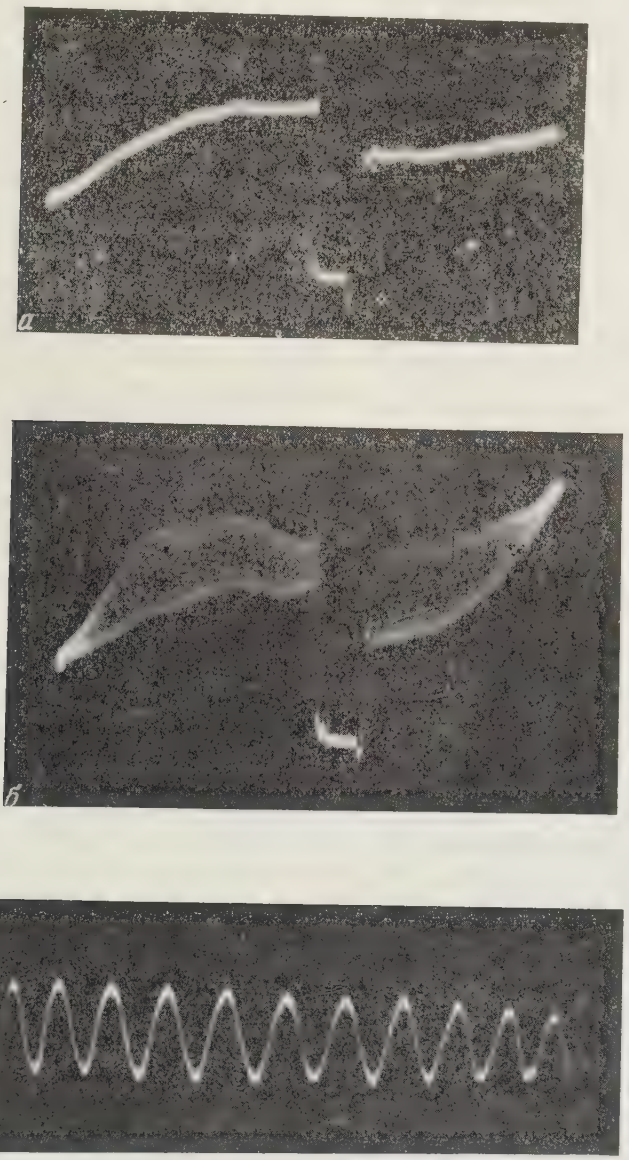


Рис. 4

дно, что при изменении потенциала сигнальной пластины от 15 до 60 *в*
ичина D/δ_0 увеличивается от 1,8 до 3,7; при изменении тока пучка
0,1 до 1,0 *мка* (рабочий диапазон изменения тока пучка) величина D/δ_0
еняется от 1,5 до 3.

Действующую апертуру пучка в указанных выше условиях можно
иближенно оценить и другим способом, при помощи которого можно
ановить длительность периода накопления и коммутации.

Известно, что в обычных условиях чересстрочной развертки после завершения коммутации полукадра (поля) потенциальный рельеф на поверхности слоя в случае передачи равномерно освещенной поверхности должен иметь строчную структуру. Если, завершив коммутацию одного полукадра, осуществить движение коммутирующего пучка поперек строк растра, то на выходе трубки в момент движения пучка поперек строчного рельефа на поверхности слоя должен существовать сигнал. Однако форма сигнала на выходе трубки в момент движения его во время кадрового обратного хода (пучок не заперт) свидетельствует о том, что при нормальном размере растра (9,5 × 12,7 *мм*²) модуляция сигнала, вызванная строчным рельефом, отсутствует.

Форма осциллограммы сигнала на выходе видикона для этого случая показана на рис. 4, *а*. Однако модуляция сигнала, а следовательно и заметная строчная структура потенциального рельефа после коммутации полукадра, появляется при увеличении величины смещения строк (δ). Это достигалось увеличением вертикального размера растра. Форма сигнала во время движения пучка в течение кадрового обратного хода для этого случая показана на рис. 4, *б*. На рис. 4, *в* показана в более крупном масштабе времени модуляция сигнала.

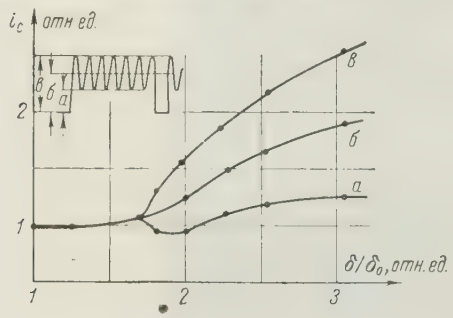


Рис. 5

Зависимость величины сигнала, соответствующего движению пучка поперек направления строк, и глубины его модуляции от относительного смещения строк показана на рис. 5. Видно, что в пределах, когда δ составляет от 1 до 1,7 от δ_0, модуляция сигнала отсутствует и величина сигнала практически остается неизменной. Это говорит о том, что в таких условиях характер коммутации можно считать по крайней мере построчным с периодом коммутации в одно поле ($^1/_{50}$ *сек*). Пучок практически одновременно коммутирует участки слоя, соответствующие двум строкам разложения. При увеличении δ между коммутируемыми строками начинают появляться неснятые заряды, которые увеличиваются при дальнейшем увеличении δ. Характер коммутации начинает приближаться к условиям чересстрочного разложения. Соответственно увеличивается время накопления, которое в идеальном случае должно составлять $^1/_{25}$ *сек*. При анализе формы кривых рис. 5 следует учитывать, что при увеличении размера растра несколько изменяется угол пересечения пучка со строчным рельефом, а также кадровая составляющая скорости движения пучка.

2. ОТКЛОНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОЛЕЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РЕЛЬЕФА

Известно, что на поверхности мишени существует определенный потенциальный рельеф даже в том случае, если она освещается равномерным световым потоком. Этот рельеф обусловлен различием в фазах коммутации и накопления для разных элементов поверхности мишени.

Если на слой спроектировано изображение, содержащее «черные» и «светлые» участки, то перед коммутацией элементы, соответствующие «черному» и «светлому», будут иметь различные потенциалы — рельеф, обусловленный распределением яркостей в передаваемом объекте.

Величина потенциала элемента, достигаемая в процессе накопления, определяется при прочих равных условиях освещенностью элемента слоя. Были проведены измерения зависимости потенциала элемента поверхности слоя перед коммутацией ($V_в$) от освещенности. Для это-

ли в одном из шести полей на катод видикона подавался положитель-
й импульс напряжения. При этом если за время передачи поля потенциал
емента поверхности мишени изменялся на величину, бо́льшую, чем
, то пучок подходил к мишени и осуществлял ее коммутацию. Если в
мент коммутации $V_к > V_{эл}$, то пучок отражался от мишени и сигнал
выходе трубки отсутствовал. Момент исчезновения видеосигнала на
ходе трубки при увеличении амплитуды импульса в катоде ($V_к$) сви-
тельствовал, следовательно, о равенстве $V_к = V_{эл}$ (величина потенци-
а элемента $V_{эл}$ определялась по отношению к исходному потенциалу
). Изменяя $V_к$, измеряли таким образом величину $V_{эл}$. Для того чтобы
изменялся режим работы трубки,
пульсы, равные $V_к$, подавались

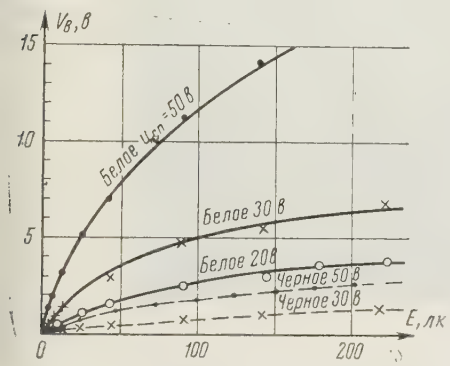


Рис. 6

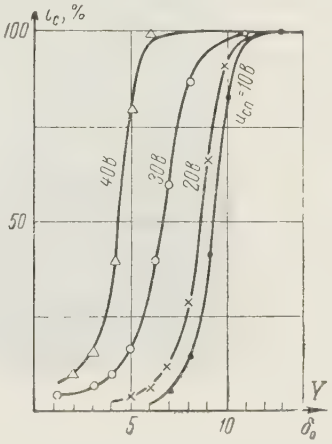


Рис. 7

все другие электроды трубки за исключением сигнальной пластины.
лее подробно о методике измерения потенциалов на поверхности ми-
ни видикона сообщалось в докладе [6].

На рис. 6 показана зависимость $V_в$ от E при различных потен-
алах сигнальной пластины и токе пучка 0,62 *мка*.

Проведенные измерения величины потенциального рельефа на поверх-
сти слоя, которые иллюстрируются кривыми рис. 6, показывают,
потенциальный рельеф в рабочем режиме видикона при малых по-
нциалах сигнальной пластины (при больших освещенностях слоя)
ставляет: для наиболее светлых участков изображения $V_в = 5 — 8$ *в*,
я черных участков изображения $V_в = 0{,}5 — 1$ *в*.

При больших потенциалах сигнальной пластины (малых освещен-
стях) потенциал участков, соответствующих наиболее светлым местам
изображении, $V_в = 10 — 12$ *в*, потенциал участков, соответствующих
ному, $V_в = 2 — 3$ *в*.

Приведенные данные относятся к различию потенциалов сравнительно
льших площадей поверхности слоя. В пределах малых участков глубина
дуляции, соответствующая черно-белым перепадам, может быть зна-
тельно меньше.

Как показывают эксперименты, потенциальный рельеф может оказы-
ть существенное влияние на траекторию и форму пучка электронов
изи поверхности слоя.

Кадровая осциллограмма сигнала на выходе видикона при передаче
ризонтальной границы черное — белое показывает, что сигнал нара-
ет в течение нескольких строк. Такой характер изменения сигнала
изи черно-белого перепада обусловлен рядом причин, главными из
горых являются: нерезкость самой границы, вызванная аберрациями
тической системы, проектирующей границу на слой; конечная величина
онта нарастания потенциального рельефа, который не может быть бес-

конечно крутым, даже если распределение зарядов на поверхности мишени носит скачкообразный характер; влияние апертуры коммутирующего пучка; отклонение коммутирующего пучка под действием полей потенциального рельефа. Положение границы не остается постоянным при изменении величины потенциального рельефа на поверхности слоя. На рис показаны результаты измерений сигналов вблизи границы черное белое при различных потенциалах сигнальной пластины. Освещенность оставалась постоянной, равной примерно 70 *мк*. Изменение глубины рельефа производили за счет изменения эффективности накопления при различных потенциалах сигнальной пластины.

В процессе измерений граница черное — белое в оптическом изображении оставалась неподвижной по отношению к поверхности слоя. Измерение сигнала производилось в определенной строке растра. Положение коммутирующего растра по отношению к поверхности слоя, а следовательно место строки, в которой производили измерения сигнала, плавно

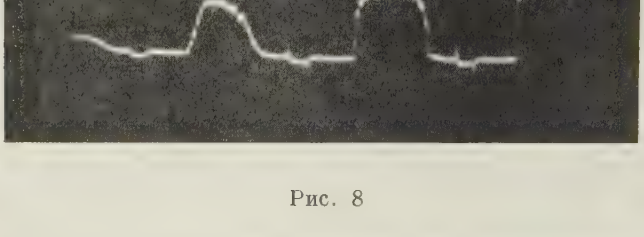


Рис. 8

регулировалось при помощи специального проградуированного устройства центровки растра. Полный диапазон центровки при этом составлял 200 *мк* (около 12 δ_0). Сигнал выражен в относительных единицах по отношению к установившемуся значению в области белого.

Важно отметить, что форма сигнала на разных расстояниях от границы черно-белого перепада различна. Осциллограмма сигналов строк лежащих вблизи (выше) границы черное — белое, показана на рис. Различная форма сигнала объясняется отклонением пучка под действием потенциального рельефа вблизи границы черное — белое. Пучок претерпевает наибольшее отклонение, проходя над центральной частью положительно заряженного участка мишени. Этому соответствует увеличение сигнала на выходе трубки. В результате на экране видеоконтрольного устройства появляются соответствующие геометрические искажения горизонтальных линий, которые при больших потенциальных рельефах станут заметными. Были произведены измерения, характеризующие величину отклонения пучка под действием потенциального рельефа. На рис. 9 показана зависимость положения границы, которая определялась как та точка растра где сигнал составлял 50% своего установившегося значения в белом, от перепада потенциального рельефа между участком, соответствующим черному и белому. Из графика видно, что при изменении глубины потенциального рельефа от 1 до 8 *в* (что составляет реальный диапазон изменения потенциалов на поверхности мишени видикона) граница перемещается примерно на 3 δ_0.

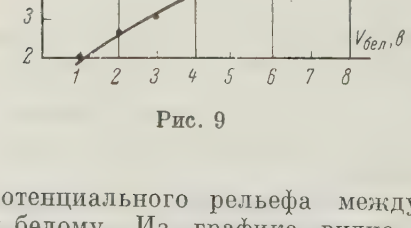


Рис. 9

Интересно отметить, что коммутирующий пучок претерпевает значительное отклонение вблизи границ растра. Известно, что потенциал неком

гируемых участков поверхности мишени (за границами растра) значи-ьно выше среднего потенциала коммутируемого участка мишени (он ределяется потенциалом сигнальной пластины). Подходя к краю ра-а (коммутируя последние строки перед запиранием пучка), пучок по-дает в поля положительно заряженной некоммутируемой части слоя отклоняется, что вызывает соответствующие нарушения геометрии ра-

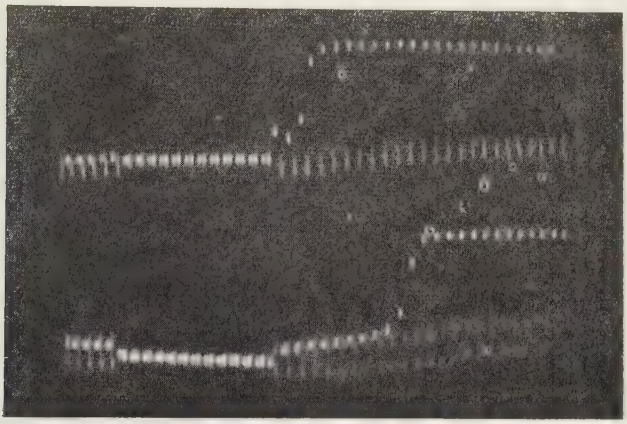


Рис 10

а. Величина отклонения пучка вблизи края растра зависит от потен-ла некоммутируемых участков слоя, а следовательно от потенциала нальной пластины. Если на край растра спроектировать изображение глой полоски так, чтобы ее граница совпадала с последней строкой гра, то при увеличении потенциала сигнальной пластины эта гра-а будет перемещаться вверх, так как ком-ирующий пучок при увеличении потен-ла сигнальной пластины будет все больше поняться полями положительно заряженной оммутируемой части растра. Размер раст-на слое при этом увеличивается.

Это явление иллюстрируется осциллограм-и сигнала вблизи верхней границы растра. рис. 10 показаны кадровые осциллограммы нала в случае, когда на край растра проек-овалась граница черное — белое. Верхняя иллограмма соответствует потенциалу сиг-ьной пластины около 5 *в*, $E = 1700$ *лк*. и увеличении напряжения на сигнальной стине до 50 *в* (при этом для сохранения ве-ины сигнала освещенность понижалась до = 4,4 *лк* применением нейтрального филь-) граница растра перемещалась вверх при-но на 14 δ_0, что видно из нижней осциллограм-(граница черное — белое, положение которой отношению к слою не изменялось, на изображении перемещалась при-но на 14 строк вниз). Зависимость отклонения пучка от потенциала нальной пластины показана на рис. 11: при увеличении потенциала нальной пластины от 5 до 55 *в* отклонение пучка в нижней части растра личивается на 10 $\delta_0 = 165$ *мк* (кривая *2*); примерно такое же отклоне-испытывает пучок и в верхней части растра (кривая *1*).

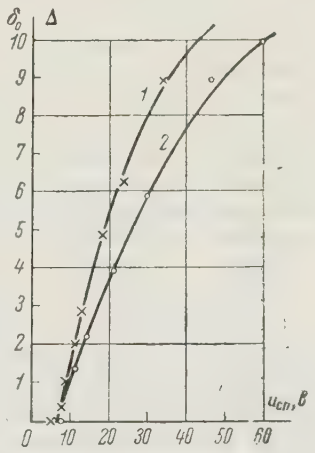


Рис. 11

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Согласно приведенным выше данным, измеренный действующий диаметр пучка превышает две-три высоты строки: $D > 2 \div 3\ \delta_0$. Важно отметить, что действующий диаметр может изменяться при изменении условий коммутации. Изменение действующей апертуры происходит за счет влияния зарядов, накопленных на соседних участках. Рассмотрим три случая: 1) коммутации одной строки равномерно освещенного участка; 2) чересстрочной развертки группы строк равномерно освещенного участка; 3) построчной развертки группы строк равномерно освещенного участка.

Характер изменения потенциала со временем в первом случае показан на рис. 12, *а*. Несмотря на то, что сечение пучка мало (например, $D_п = \delta_0$), благодаря взаимодействию пучка с соседними участками, заряженными положительно, участок с пониженным потенциалом, а следовательно и действующая апертура окажется шире, чем сечение пучка (на рис. 12, *а* момент t_3 в 3 раза, $D \simeq 3\ \delta_0$).

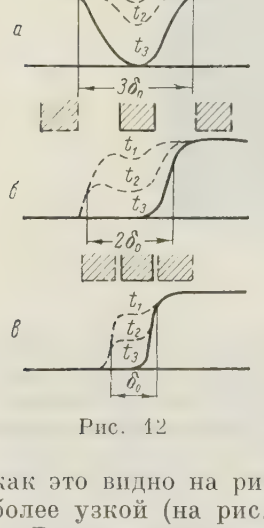


Рис. 12

При чересстрочной коммутации равномерно освещенного участка (рис. 12, *б*) на строках, ранее подвергшихся коммутации, потенциал уже понижен (на рис. 12, *б* участки слева). При коммутации данной строки понижается потенциал как непосредственно на коммутируемой строке, так и на следующей (на рис. 12, *б* справа). Действующая апертура окажется уже, чем в случае коммутации одной единственной строки, но шире, чем сечение пучка (на рис. 12, *б* в 2 раза, $D \simeq 2\ \delta_0$). Картина, представленная на рис. 12, *б*, будет иметь место при чересстрочной развертке независимо от того, какие строки в данный момент коммутируются — четные или нечетные.

При коммутации же по построчной развертке, как это видно на рис. 12, *в*, действующая апертура пучка окажется еще более узкой (на рис. 12, *в* $D \simeq \delta_0$).

В случае чересстрочного разложения осуществляется коммутация как тех строк, по которым проходит центр пятна пучка, так и соседних строк. Соответственно, и это подтверждено экспериментами, время накопления оказывается равным времени половины кадра ($^1/_{50}$ *сек* для обычного стандарта разложения). Однако в этом случае встает вопрос, как сохраняется разрешающая способность 600 линий или близкая к ней, в то время как одновременная коммутация пучком участка высотой 2 строки или больше означает, что имеет место 312,5-строчная прогрессивная развертка с 50-ю кадрами в 1 *сек*.

Кажущееся противоречие между тем, что измеренный диаметр пучка превышает $2 \div 3\ \delta_0$, а время накопления не превышает времени полукадра с одной стороны, и тем, что в реальных видиконах по горизонтальному клину таблицы 0249 разрешается около 500 линий, а по вертикальному клину около 600 линий, может быть объяснено на основании полученных выше экспериментальных данных, из которых следует, что действующая апертура пучка в сильной степени зависит от величины накопленного заряда.

Причина высокой разрешающей способности в горизонтальном направлении, как известно, заключается в следующем. Хотя действующая апертура пучка и велика ($2 \div 3\ \delta_0$), однако эффективность действия передней кромки пятна пучка и его задней кромки различны. Действительно, передняя кромка пучка попадает на участок с высоким потенциалом, который под действием коммутации понижается. Следующий участок пучка, подходящий к этой же точке, встречает более низкий

потенциал, и эффективность коммутации оказывается ниже. Для частного случая пучка квадратной формы с равномерной плотностью электронов при линейном изменении эффективности коммутации с изменением потенциала элемента эффективность коммутации различных участков пучка определяется выражением $\alpha = \alpha_0 e^{-\xi/\xi_e}$, где α_0 — эффективность коммутации передней кромки пучка; α — эффективность коммутации участка пятна пучка, расположенного на расстоянии ξ от передней кромки пучка; ξ_e — расстояние от передней кромки пучка, на котором эффективность уменьшается в e раз.

Величина заряда, нейтрализованного частью пучка, уже прошедшей рассматриваемый участок (до расстояния ξ от кромки), определяется выражением $q_\xi = q_0(1 - e^{-\xi/\xi_e})$, а для участка, по которому прошло все пятно, $q_8 = q_0(1 - e^{-D/\xi_e})$. Нетрудно подсчитать, что если эффективность пучка такова, что $\xi_e = D/2$, то первая половина пучка коммутации это $^3/_4$ всего коммутируемого на участке заряда. При меньшем ξ_e еще большая часть заряда снимается узкой передней кромкой пучка. Таким образом можно утверждать, что хотя действуют все участки пятна пучка, практически в формировании сигнала играет решающую роль передняя кромка, и горизонтальный размер действующей апертуры оказывается существенно меньше. Хотя действительная картина уменьшения горизонтального размера действующей апертуры пучка усложняется еще воздействием заряда, накопленного на соседних участках, из приведенных рассуждений видно, что, несмотря на большой действующий размер пятна пучка, в горизонтальном направлении можно получить высокую разрешающую способность.

При оценке разрешающей способности в вертикальном направлении необходимо учитывать два фактора. Во-первых, то, что в условиях чересстрочной развертки, даже в том случае, если действующий размер пучка $2\delta_0$, благодаря смещению растров при переходе от поля к полю на величину δ_0 в вертикальном направлении, на горизонтальном клине должны быть видны штрихи, соответствующие отметке 500, хотя контраст этих штрихов может быть очень мал. Во-вторых то, что при передаче горизонтальных черных и белых штрихов высотой около δ_0 условия коммутации таковы, что при прохождении пучка над освещенными строками начальная эффективность пучка выше, чем при прохождении его над затемненными строками. Это может привести к увеличению межстрочных остаточных зарядов в светлых участках при коммутации затемненных строк, что приводит к увеличению глубины модуляции в мелких деталях в вертикальном направлении.

Необходимо, однако, отметить, что вопросы, связанные с разрешающей способностью видикона, в настоящее время не могут считаться достаточно полно изученными и требуют дальнейшего уточнения.

ВЫВОДЫ

На основании полученных экспериментальных данных можно сделать следующие выводы.

1. Диаметр действующей апертуры коммутирующего пучка в условиях, близких к однострочной развертке, для исследованных видиконов составляет $2 \div 3\ \delta_0$, т. е. при коммутации в этих условиях пучок захватывает участок, по высоте равный $2 \div 3$ условным элементам изображения. Действующая апертура пучка изменяется при изменении величины потенциального рельефа на поверхности слоя и при изменении тока пучка.

2. Период коммутации (время накопления) составляет $^1/_{50}$ *сек*, т. е. время, равное длительности передачи одного полукадра. Это означает, что исследованные видиконы работают в условиях построчного разложения с числом строк 312,5 с перемежающимся от поля к полю растром.

3. Потенциальный рельеф на поверхности слоя, соответствующий крупным деталям изображения, составляет 0,5—12 *в* и может несколько изменяться при изменении режима работы видикона.

4. Потенциальный рельеф оказывает существенное влияние на форму, размеры и траекторию коммутирующего пучка вблизи границ черно-белых перепадов. Количественно это влияние характеризуется приведенными выше графиками.

5. Влияние потенциального рельефа на параметры коммутирующего пучка сказывается на рабочих характеристиках видикона, и, в частности, это приводит к снижению контрастности передачи мелких деталей в горизонтальном направлении и к снижению четкости в вертикальном направлении.

6. Для улучшения характеристик видиконов следует наряду с улучшением фокусировки пучка стремиться к уменьшению глубины потенциального рельефа на мишени при условии неизменной величины накопленного заряда, а следовательно и величины выходного сигнала, что можно сделать, увеличив емкость, соответствующую элементу слоя. Однако в этом случае для уменьшения инерционности следует одновременно увеличить эффективность коммутации потенциального рельефа.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Гуревич, Физические процессы в передающих телевизионных трубках, Физматгиз 1958.
2. А. Г. Лапук, И. И. Цуккерман, Техника телевидения, 1955, 8, 18.
3. R. Theile, F. Pilz, Arch. elektr. Übertrag., 1957, 1, 17.
4. Я. А. Рыфтин, ЖТФ, 1955, 25, 12, 2214.
5. Я. А. Рыфтин, ЖТФ, 1957, 27, 8, 1870.
6. Р. Е. Быков, С. Б. Гуревич, Процессы накопления и коммутации в видиконе в переходном режиме, Доклад на научной сессии НТОР и Э, посвященной 100-летию со дня рождения А. С. Попова, Аннотации к докладам НТОР и Э им. А. С. Попова, 1959, стр. 67.

Поступила в редакцию
26 V 1959

№ 4

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДА ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ С ПЕРИОДИЧЕСКИ-ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ТРАЕКТОРИЯМИ*

Г. Н. Рапопорт

Дано общее решение задачи о представлении высокочастотного поля, возбуждаемого электронным потоком в цилиндрическом волноводе, непосредственно через характеристики движения электронов, скорости которых периодически изменяются не только по величине, но и по направлению.

Теория возбуждения полых систем [1—5] дает возможность опре-ть поле по заданному распределению токов.

днако в самосогласованных задачах электроники СВЧ распределение ронных токов не является заданным и его определение в общем е затрудняется тем, что скорости электронов изменяются не только личине, но и по направлению — изменяется и форма электронных торий. Поэтому решение вопроса о возбуждении в конечном счете тся к установлению соответствия между характеристиками высоко-гного поля и обобщенными характеристиками движения электро-Одной из таких характеристик является время пролета электрона ункция координат и начальной фазы [6, 7].

литературе указанная задача полностью решена только для пуч-траекториями, форма которых фиксирована (например сильным ческим магнитным полем), и для некоторых частных случаев — гом колебаний электронных траекторий, но в приближении теории х сигналов [2, 8, 9].

[10] рассмотрен более общий случай, однако также в приближении х сигналов. Ниже дается решение общей задачи о возбуждении дрического волновода электронным пучком с криволинейными и чающимися во времени траекториями. Решение пригодно и для боль-мплитуд.

я упрощения выкладок вначале предполагается, что траектории онов не пересекают оболочку волновода и не имеют точек воз-

кодным положением данной работы являются результаты теории бждения регулярных волноводов [4].

гласно [4], напряженность n-й гармоники $\vec{E}_n(x, y, z)e^{in\omega t}$ электри-о поля, возбуждаемого в цилиндрическом волноводе распреде-ем токов с плотностью

$$\vec{j} = \sum_n \vec{j}_n(x, y, z)\, e^{in\omega t},$$

тавляется суммой по всем собственным волнам $\vec{E}_{\pm s}(x, y, z)$

$$\vec{E}_n = \sum_s (C_s \vec{E}_s + C_{-s}\vec{E}_{-s}) + i\vec{z}_0 \frac{j_{nz}}{n\omega\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

---

*) Доложено на семинаре в ИРЭ АН СССР, март, 1959 г.

где

$$C_s = \frac{1}{N_s}\int\limits_{(z_0 z)} \vec{j}_n \vec{E}_{-s}\, dv; \quad C_{-s} = \frac{1}{N_s}\int\limits_{(z, z_1)} \vec{j}_n \vec{E}_s\, dv$$

(обозначения отличаются от обозначений в работе [4] только перехо к практической системе единиц и экспоненциальным фактором $e^{i\omega t}$ в сто $e^{-i\omega t}$, $\vec{E}_{\pm s}$ и N_s должны быть определены для частот $n\omega$).

2. При рассмотрении движения электронов, согласно [6], будем счит независимой переменной не время t, а координату z.

Пусть t_0 — момент, когда электрон пересекает плоскость $z = z$ точке (x_0, y_0), $\alpha = \omega t_0$ — начальная фаза. Начальные скорости элект нов считаем заданными функциями α, x_0, y_0 (периодическими по Тогда траектория электрона и момент пересечения ею плоскости z ($z > z_0$) однозначно определяются начальными условиями (α, x_0, y_0) и п дольной координатой z.

Поэтому обобщенными характеристиками пучка целесообразно с тать следующие решения уравнений движения:

$$\omega t - \alpha = \varphi(\alpha, x_0, y_0, z),$$

$$x = X(\alpha, x_0, y_0, z),$$

$$y = Y(\alpha, x_0, y_0, z),$$

$\varphi(\alpha, x_0, y_0, z)$, а также выражения (4) — периодические функции α с пе одом 2π.

В начальной плоскости отсчета $z = z_0$ считается заданной продо ная плотность тока пучка

$$j_0 = j_z(\alpha, x_0, y_0, z_0),$$

причем зависимость от α учитывает возможность модуляции плотно пучка внешними устройствами.

Запишем j_0 в виде

$$j_0 = j_z(\alpha, x_0, y_0, z_0) = \int\limits_0^{2\pi} j_z(\beta, x_0, y_0, z_0)\,\delta(\alpha - \beta)\, d\beta,$$

где δ — периодическая дельта-функция Дирака. Смысл (6) состоит в т что плотность тока (как и любая функция времени) может быть пр ставлена как результат наложения сдвинутых во времени импульс Очевидно, что это справедливо и в отсутствие начальной модуля плотности, когда j_0 не зависит от α.

Рассмотрим вначале случай, когда начальное распределение плот сти тока имеет вид

$$j_{0\beta} = j_z(\alpha, x_0, y_0, z_0)\,\delta(\alpha - \beta).$$

Тогда в начальную плоскость отсчета электроны поступают тольк фазах β, $\beta + 2\pi, \ldots, \beta + 2\pi N, \ldots$. Очевидно, что в этом случае все эл троны движутся по фиксированным траекториям

$$x = X(\beta, x_0, y_0, z); \quad y = Y(\beta, x_0, y_0, z).$$

Обозначим $C_{s,\beta}$ — амплитуды (2) при начальном распределении плотно тока (7). Тогда из принципа суперпозиции и выражения (6) следует, амплитуды будут равны при заданном начальном распределении плотности тока (5) иском

$$C_s = \int\limits_0^{2\pi} C_{s,\beta}\, d\beta.$$

Вычислим слагающую $dC_{s,\beta}$, вносимую элементарным пучком ΔI, проходящим через площадку $dx_0 dy_0$ с координатами x_0, y_0 в начальной плоскости отсчета.

Легко видеть, что

$$dC_{s,\beta} = \int_{z_0}^{z} \Delta I_n(z) \frac{d\vec{\sigma}}{dz} \vec{E}_{-s}(X, Y, z)\, dz, \tag{10}$$

где интегрирование проводится по траектории (8), $d\vec{\sigma}$ — элемент траектории и $\Delta I_n(z)$ — амплитуда n-й гармоники тока элементарного пучка.

Из условия сохранения заряда следует, что

$$\Delta I_n(z) = dx_0\, dy_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\tau} j_{0\beta} \frac{d\alpha}{d(\omega t)} e^{-in\omega t}\, d(\omega t).$$

Учитывая (7) и (3), получим

$$\Delta I_n(z) = j_z(\alpha, x_0, y_0, z_0)\, dx_0\, dy_0 \frac{1}{\pi} e^{-in[\beta+\varphi(\beta, x_0, y_0, z)]}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10) и интегрируя результат по сечению $Q(x_0, y_0)$ пучка начальной плоскостью отсчета, находим $C_{s,\beta}$.

Применяя (9) и учитывая, что

$$\vec{E}_{\pm s} = \vec{\mathscr{E}}_{\pm s}(x, y)\, e^{\mp i\gamma_s z},$$

где γ_s — постоянные распространения и $\vec{\mathscr{E}}_{\pm s}$ — векторные функции, не зависящие от z, получим окончательный результат:

$$C_s = \frac{1}{\pi N_s} \int_{(Q)} dq \int_{z_0}^{z} dz \int_0^{2\pi} j_z^0(\alpha, q)\, e^{i[\gamma_s z - n(\alpha+\varphi)]} \vec{\mathscr{E}}_{-s}(X, Y) \vec{M}\, d\alpha, \tag{12}$$

где буквой q обозначены координаты x_0, y_0, $dq = dx_0 dy_0$; $\vec{M}(\alpha, x_0, y_0, z) = d\vec{\sigma}/dz$ — вектор с составляющими $(\partial X/\partial z, \partial Y/\partial z, 1)$; X, Y, $\vec{M}$ и φ — периодические функции α. Выражение для C_{-s} имеет аналогичный характер.

В случае фиксированных криволинейных траекторий вычисление (12) упрощается, поскольку $\vec{\mathscr{E}}_{-s}$ и $\vec{M}$ не зависят от α и могут быть вынесены из-под знака последнего интеграла.

В пучках с периодически изменяющимися траекториями непосредственное определение амплитуд плотности тока затруднительно. Поэтому составляющую j_{nz} в (1) целесообразно представить разложением

$$j_{nz} = \sum_p A_p^{(n)}(z)\, \psi_p(x, y) \tag{13}$$

по произвольной системе функций ψ_p, ортонормированной на поперечном сечении волновода Q_0.

Коэффициенты $A_p^{(n)}$ определяются аналогично (9), (11).

В результате имеем

$$A_p^{(n)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{Q_0} dq \int_0^{2\pi} j_z(\alpha, q)\, e^{-in[\alpha+\varphi(\alpha, q, z)]} \psi_p^{+}(X, Y)\, d\alpha. \tag{14}$$

В качестве ψ_p может быть взята, например, система E_{zp}-продольных составляющих волн типа TM всевозможных порядков.

Формулы (1), (12) — (14) полностью определяют решение поставленной задачи.

3. Рассмотрим в качестве примера возбуждение волновода электронным пучком, траектория которого в отсутствие высокочастотных полей — тонкая спираль радиуса a с шагом $2\pi/h$, причем ось спирали параллельна оси волновода, $h = \Omega/v_z$, где Ω — циклотронная частота продольного магнитного поля $B_z = \text{const}$ и v_z — продольная скорость электронов. На входе в систему ток пучка немодулирован.

Ограничиваясь случаем слабых сигналов, можно записать кинематические характеристики электронов в виде

$$\omega t - \alpha = \varphi(\alpha, z) = \gamma_e z + \frac{\varepsilon}{2}\psi e^{i\alpha} + \ldots, \tag{15}$$

$$\vec{r}(\alpha, z) = ae^{ihz}\left[\vec{p}_0 + \frac{\varepsilon}{2}\vec{\Phi}e^{i\alpha}\right] + \ldots, \tag{16}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор электрона в плоскости (xoy), причем начало отсчета поперечных координат x, y взято на оси спирали; ε — малый параметр задачи; $\psi(\varepsilon z)$ и $\vec{\Phi}(\varepsilon z)$ — медленно изменяющиеся функции z, характеризующие возмущение движения электронов высокочастотным полем; $\vec{p}_0$ — постоянный вектор с составляющими $\left(\frac{1}{2}, -i\frac{1}{2}, 0\right)$, $\gamma_e = \omega/v_z$.

В (15) и (16) опущены члены, содержащие $e^{-i\alpha}$ и e^{-ihz}, наличие которых не влияет на окончательный результат расчета. С точностью до величин порядка ε^2 имеем

$$\vec{M}_\perp = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = ih\vec{r}. \tag{17}$$

Знак $\perp$ — обозначение поперечных составляющих вектора или оператора.

Для вычисления C_s следует подставить (15)—(17) в (12), полагая $n = 1$.

Предполагая радиус спирали a достаточно малым ($\varkappa_s a \ll 1$, где $\varkappa_s$ — «поперечный» параметр распространения волны рассматриваемого типа), можно разложить $\vec{\mathscr{E}}_{-s}(X, Y) \equiv \vec{\mathscr{E}}_{-s}(\vec{r})$ в ряд по степеням $(\varkappa_s a)$.

В результате получим, пренебрегая высшими степенями ε:

$$C_s = I_0 \frac{\varepsilon}{N_s} \int_{z_0}^{z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m(\varepsilon z)\, e^{i(\gamma_s - \gamma_e + mh)z} dz, \tag{18}$$

где $q_m(\varepsilon z)$ — медленно изменяющиеся функции z, причем наибольшую величину имеют члены с индексами $m = 0, 1, -1$; I_0 — постоянная слагающая точка пучка.

Из (18) следует, что наибольшие амплитуды C_s имеют волны, для которых выполняется условие синхронизма волны с пространственными гармониками электронного пучка низших порядков $m = 1$, $m = -1$ (случай $m = 0$ возможен только для замедляющих волноводных систем).

Если это условие выполнено для $m = 1$, т. е.

$$\left|\frac{\gamma_s - \gamma_e + h}{\gamma_e}\right| \ll 1, \tag{19}$$

то в (18) можно пренебречь всеми членами, кроме соответствующего $m = 1$, причем

$$q_{s1} = ah\vec{\Pi}_s(\vec{p}_0\psi + i\vec{\Phi}), \tag{20}$$

где

$$\vec{\Pi}_s = \left[\vec{\mathscr{E}}_{s\perp} - \frac{i}{h}\operatorname{grad}_\perp \mathscr{E}_{s,z}\right]_{r=0}.$$

Таким образом, получено непосредственное выражение амплитуд собственных волн волновода через функции ψ и $\vec{\Phi}$, описывающие движение ектронов.

Полная система уравнений задачи (без учета полей объемного заряда) лючает выражения (18), (20) для распространяющихся волн и уравния второго порядка для функций ψ и $\vec{\Phi}$, которые получаются из уравний движения электронов в поле. Дальнейшее рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной статьи.

В заключение отметим, что принятые выше ограничения не являются инципиальными.

В случае оседания электронов на оболочку волновода все получене соотношения остаются в силе, если ввести в (12) и (14) соответствуюе ограничение областей интегрирования.

При наличии точек возврата достаточно просуммировать подынтегальные выражения в (12) и (14) по всем точкам пересечения данной оскости z одной и той же траекторией (4).

Полученные результаты применялись к задачам фазохронного [11,] взаимодействия с незамедленными электромагнитными волнами ектронных пучков с периодическими траекториями.

ЛИТЕРАТУРА

Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Изд. ВКАС, 1949.
В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, ГТТИ, 1953.
Л. А. Вайнштейн, Возбуждение объемных резонаторов, ЖТФ, 1953, **23**, 4, 646.
Л. А. Вайнштейн, Возбуждение волноводов, ЖТФ, 1953, **23**, 4, 654.
Л. А. Вайнштейн, Электронные волны в периодических структурах, ЖТФ, 1957, **27**, 10, 2340.
В. Я. Савельев, К теории клистрона, ЖТФ, 1940, **10**, 16, 1365.
A. Nordsieck, Theory of large signal behaviour of travelling-wave tube, Proc. I. R. E., 1953, **41**, 5, 630.
Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, ИЛ, 1952, гл. 13.
R. W. Gould, Space-charge effect in beam-type magnetrons, J. Appl. Phys., 1957, **28**, 5, 599.
А. В. Гапонов, Взаимодействие непрямолинейных электронных потоков с электромагнитными волнами в линиях передачи, Изв. МВО СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 3, 450.
С. И. Тетельбаум, О понятии фазовой скорости последовательности частиц, Докл. АН УССР, 1954, 1, 31.
С. И. Тетельбаум, Фазохронный генератор обратной волны, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 6, 705.

Поступила в редакцию
6 VII 1959

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННЫМ ДИСКОМ, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИМСЯ В ВОЛНОВОДЕ

Н. А. Хижняк

Вычислены потери энергии на поляризацию среды и черенковское излучение заряженным диском, равномерно движущимся в волноводе медленных волн. Показано, что поле, порождаемое диском, состоит из поля, «увлекаемого» диском, и «оторвавшегося» поля и вычислены потоки мощности и запасенная энергия этих полей. Обсуждаются условия когерентности при движении протяженного диска в волноводе в случаях резких и размытых границ. Обсуждаются условия когерентности при движении цепочек дисков или сгустков.

При равномерном движении заряженной частицы в волноводе медленных электромагнитных волн она теряет энергию на черенковское излучение и поляризацию среды [1—4]. В настоящей работе рассмотрены потери энергии сгустком частиц, имеющим форму диска с равномерно распределенной по радиусу плотностью зарядов и движущимся с постоянной скоростью вдоль волновода медленных волн.

1. Предположим, что в волноводе радиуса R, нагруженном однородным и изотропным диэлектриком с проницаемостями ε и μ, со скоростью v движется равномерно заряженный бесконечно тонкий диск радиуса R, равного радиусу волновода. Тогда плотность тока j_z, создаваемого диском, будет постоянна по сечению волновода и равна

$$j_z = qv\delta(z - vt), \qquad (1)$$

где q — плотность поверхностного заряда на диске. Очевидно, что полный заряд диска равен $Q = \pi R^2 q$.

Аксиально-симметричное поле, создаваемое диском, определяется уравнениями

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rH_\varphi = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_z, \qquad (2)$$

где j_z задан соотношением (1).

Разлагая δ-функцию в интеграл Фурье

$$\delta(z - vt) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}\frac{d\omega}{v},$$

для компонент Фурье этого поля будем иметь выражения (в дальнейшем, поскольку это не вызывает недоразумений, компоненты Фурье электромагнитного поля будем обозначать так же, как и поле).

$$H_\varphi = \frac{1}{ik\left(\mu - \frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)}\frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad E_r = \frac{1}{\varepsilon\beta^2}H_\varphi \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right), \qquad (3)$$

E_z находится из уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dE_z}{dr}+k^2\varepsilon\left(\mu-\frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)E_z=\frac{2q}{c}ik\left(\mu-\frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right).$$

Так как при $0\leqslant r<R$ справедливо разложение [5]

$$1=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\chi_n\frac{r}{R}\right)}{\chi_n J_1(\chi_n)}.$$

Для компоненты Фурье поля E_z имеем следующее выражение

$$E_z=\frac{4q}{c}ik\left(\mu-\frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\chi_n\frac{r}{R}\right)}{\chi_n J_1(\chi_n)}\frac{1}{k^2\varepsilon\left(\mu-\frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)-\frac{\chi_n^2}{R^2}}. \tag{4}$$

Согласно (3) остальные компоненты равны

$$H_\varphi=-\frac{4q}{Rc}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\chi_n\frac{r}{R}\right)}{J_1(\chi_n)}\frac{1}{k^2\varepsilon\left(\mu-\frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)-\frac{\chi_n^2}{R^2}}, \tag{5}$$

$$E_r=\frac{1}{\varepsilon\beta}H_\varphi. \tag{6}$$

Полные потери энергии диском равны

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right)=2\pi\int_0^R rdr\left(-\frac{d\mathscr{E}(r)}{dz}\right)_q,$$

$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right)_q$ — полные потери энергии элементом заряда q, которые находятся по формуле Ландау [6]. Следовательно,

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right)=\frac{8iQ^2}{\pi R^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega\varepsilon(\omega)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\chi_n^2}-\frac{1}{\chi_n^2-k^2R^2\varepsilon\left(\mu-\frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)}\right\}, \tag{7}$$

χ_n — корни функции Бесселя нулевого порядка.

Для вычисления сумм, стоящих под интегралом, воспользуемся формулой Эйлера [5]

$$J_0(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\chi_n^2}\right).$$

Логарифмируя и дифференцируя по z, находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\chi_n^2-z^2}=\frac{1}{2z}\frac{J_1(z)}{J_0(z)},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\chi_n^2}=\frac{1}{4}.$$

Поэтому полные потери энергии диском равны

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right)=\frac{2iQ^2}{\pi R^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega\varepsilon(\omega)}\left\{1-\frac{2}{z}\frac{J_1(z)}{J_0(z)}\right\},$$

где

$$z=\sqrt{k^2R^2\varepsilon\left(\mu-\frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)}.$$

Так как подынтегральная функция является нечетной функцией ... стоты, то интеграл равен сумме вычетов в полюсах, расположенн... на вещественной оси. Эти полюсы находятся как вещественные кор... уравнений

$$\varepsilon(\omega)=0,$$

$$J_0(z(\omega))=0 \qquad (...$$

(точки $\omega=0$ и $z(\omega)=0$ не являются особенностями). Корень урав... ния (9) определяет поляризационные потери, а корни уравнения (10) ... потери на черенковское излучение, так как это уравнение являе... дисперсионным уравнением рассматриваемого волновода.

2. Пусть ω_0 является корнем уравнения (9). Тогда для поляри... ционных потерь находим следующее выражение:

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right)_{\text{поляр}}=\frac{2Q^2}{R^2}\frac{1}{\omega_0\left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}}\left\{1-\frac{2\beta}{k_0R}\frac{I_1\left(\frac{k_0R}{\beta}\right)}{I_0\left(\frac{k_0R}{\beta}\right)}\right\}. \qquad (...$$

В частности, если средой, заполняющей волновод, является плазма, ... $\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}$, где e, m, n — заряд, масса и плотность электронов ... поляризационные потери равны

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right)_{\text{поляр}}=\frac{Q^2}{R^2}\left\{1-\frac{2v}{R}\sqrt{\frac{m}{4\pi ne^2}}\frac{I_1\left(\frac{R}{v}\sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}\right)}{I_0\left(\frac{R}{v}\sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}\right)}\right\}. \qquad (...$$

При $n\to 0$, как и должно быть, поляризационные потери стремятся ... нулю (I_1 и I_0 — модифицированные функции Бесселя).

3. Потери энергии на черенковское излучение, определяемые в ... люсах (10), равны

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right)_{\text{чер}}=\frac{8Q^2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega\varepsilon(\omega)}\frac{1}{\frac{d}{d\omega}\left[k^2R^2\varepsilon\left(\mu-\frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)\right]_{\omega=\omega_n}}. \qquad (...$$

где ω_n — корень уравнения (10).

Если волновод полностью нагружен плазмой, то в нем медленн... волны не могут распространяться, уравнение (10) вещественных кор... не имеет и черенковское излучение отсутствует.

Если предположить, что диэлектрик, заполняющий волновод, ... обладает дисперсией и величины ε и μ не зависят от частоты, тогда д... черенковских потерь будем иметь следующее простое выражение:

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right)_{\text{чер}}=\frac{Q^2}{R^2\varepsilon}. \qquad (...$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче ввиду конечности поперечных меров диска нет надобности обрывать суммирование в выражении потерь на некотором $n = N_{\text{макс}}$.

. Если заряженный диск имеет конечную толщину h, то выражение плотности тока принимает вид

$$j_z = \rho_0 v \int_0^h \delta(z - vt + \varepsilon)\, d\varepsilon,$$

ρ_0 — объемная плотность зарядов. Следовательно, для полных потерь гии вместо формулы (8) будем иметь следующее выражение:

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right) = \frac{2iQ^2}{\pi R^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega h}{2v}\right)}{\left(\frac{\omega h}{2v}\right)^2} \frac{d\omega}{\omega\varepsilon(\omega)} \left\{1 - \frac{2}{z}\frac{J_1(z)}{J_0(z)}\right\}, \tag{15}$$

Q — по-прежнему полный заряд диска, $Q = \pi R^2 h \rho_0$. Соответственно енятся и формулы (11)—(14).

5. Исследуем теперь характер электромагнитного поля, создаваемого кущимся заряженным диском в волноводе. Для этого выражения — (6) необходимо умножить на $e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)}$ и проинтегрировать по ча-гам от $-\infty$ до ∞. После некоторых преобразований для компонент я будем иметь следующие выражения:

$$E_z = -\frac{8Q}{\pi R^2 \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\chi_n \frac{r}{R}\right)}{\chi_n J_1(\chi_n)} \int_0^{\infty} \sin\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) \frac{\omega d\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}, \tag{16}$$

$$E_r = \frac{8Q}{\pi c R \varepsilon\beta} \frac{1}{\frac{R^2\varepsilon}{c^2}\left(\mu - \frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\chi_n \frac{r}{R}\right)}{J_1(\chi_n)} \int_0^{\infty} \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) \frac{d\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}, \tag{17}$$

$$H_\varphi = \frac{8Q}{\pi c R} \frac{1}{\frac{R^2\varepsilon}{c^2}\left(\mu - \frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\chi_n \frac{r}{R}\right)}{J_1(\chi_n)} \int_0^{\infty} \cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) \frac{d\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}, \tag{18}$$

$\omega_n^2 = \chi_n^2 c^2 / R^2 \varepsilon\left(\mu - \frac{1}{\varepsilon\beta^2}\right)$. Интегралы, стоящие в формулах (16) -(18) яются разрывными функциями параметра $t - \frac{z}{v}$. Они равны

$$\text{n}\, px \frac{xdx}{q^2 - x^2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\cos pq \quad (p > 0), \\ -\frac{\pi}{4} \quad (p = 0), \\ 0 \quad (p < 0), \end{cases} \qquad \int_0^{\infty} \cos px \frac{dx}{q^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2q}\sin pq \quad (p > 0), \\ 0 \quad (p \leqslant 0). \end{cases} \tag{19}$$

Случай $p < 0$ соответствует $t < z/v$, т. е. полю впереди диска. Согласно (19), поле впереди диска равно нулю (дисперсными свойствами диэлектрика пренебрегаем) и за диском $t - \frac{z}{v} > 0$ равно

$$E_z = \frac{4Q}{R^2\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\chi_n \frac{r}{R}\right)}{\chi_n J_1(\chi_n)} \cos \omega_n \left(t - \frac{z}{v}\right),$$

$$E_r = \frac{1}{\varepsilon\beta} H_\varphi = \frac{4Q}{\varepsilon R^2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\chi_n \frac{r}{R}\right)}{\chi_n J_1(\chi_n)} \sin \omega_n \left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (20)$$

На поверхности диска E_r и H_φ равны нулю, а E_z претерпевает скачок

$$E_{z+0} - E_{z-0} = \frac{2Q}{R^2\varepsilon} = \frac{2\pi q}{\varepsilon}.$$

Поток вектора Умова — Пойнтинга S за диском, согласно (20), равен

$$S = S_1 + S_2 = \frac{Q^2 v}{2R^2\varepsilon(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)} - \frac{2Q^2 v}{R^2\varepsilon(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\omega_n \left(t - \frac{z}{v}\right)}{\chi_n^2}, \quad (21)$$

а энергия электромагнитного поля на единице длины волновода равна

$$W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2\varepsilon\mu\beta^2}{2R^2\varepsilon(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)} - \frac{2Q^2}{R^2\varepsilon(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\omega_n \left(t - \frac{z}{v}\right)}{\chi_n^2}. \quad (22)$$

Между первыми слагаемыми в выражениях для S и W имеется связь

$$S_1 = v_{\text{гр}} W_1,$$

где $v_{\text{гр}} = c/\varepsilon\mu\beta$ — групповая скорость волн в волноводе с диэлектриком. Такая связь между потоком мощности и энергией поля характерна для «свободного» поля без зарядов. Между вторыми слагаемыми соответствующая связь имеет вид

$$S_2 = v w_2$$

и характерна для поля, «увлекаемого» зарядом. Поэтому в формулах (21) и (22) первые слагаемые определяют поток мощности и энергию поля, «оторвавшегося» от заряженного диска, а вторые слагаемые определяют поток мощности и энергию поля, «увлекаемого» диском.

Указанное разделение полей становится еще более наглядным, если рассмотреть изменение средних по времени величин $\bar{S}$ и $\bar{W}$ в фиксированной точке, например в начале координат $z = 0$. Так как величины S и W не являются периодическими функциями времени, то под их средним значением за время T будем понимать

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, dt.$$

Из (21) и (22) находим, что

$$\overline{S} = \frac{Q^2 v}{2R^2\varepsilon\,(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)} - \frac{2Q^2 v}{R^2\varepsilon\,(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\omega_n T}{2\omega_n \chi_n^2 T},$$

$$\overline{W} = \frac{Q\varepsilon\mu\beta^2}{2R^2\varepsilon\,(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)} - \frac{2Q^2}{R^2\varepsilon\,(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\omega_n T}{2\omega_n T \chi_n^2}$$

ри $t < 0$ обе величины $\overline{S}$ и $\overline{W}$ равны нулю). Следовательно, в начальный момент времени $t \simeq 0$ поток мощности равен нулю, а энергия поля $= Q^2/2R^2\varepsilon$. С ростом времени поток мощности и запасенная энергия зрастают, а при $T \to \infty$, когда заряженный диск уходит на бесконечность, остается лишь поле, «оторвавшееся» от диска.

6. Рассмотрим теперь условия когерентности излучения при движении протяженного диска с заданным постоянным распределением плотности заряда в нем *. Обозначим через $2h$ ширину диска (радиус диска предполагается равным радиусу волновода). Тогда плотность тока, создаваемого этим диском, можно представить в виде

$$j = ev \int_{-h}^{h} \rho(\xi)\, \delta(z - vt + \xi)\, d\xi, \tag{23}$$

где $\rho(\xi)$ — распределение плотности заряда в диске по его толщине в системе координат, неподвижно связанной с диском. Полные потери энергии всеми частицами диска на излучение и поляризацию среды определяются соотношением

$$\left(-\frac{dw}{dz}\right) = \frac{2i}{\pi R^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)\, A^*(\omega)}{\omega\varepsilon(\omega)} \left\{1 - \frac{2}{z}\frac{J_1(z)}{J_0(z)}\right\} d\omega, \tag{24}$$

где

$$A(\omega) = \pi R^2 \int_{-h}^{h} \rho(\xi)\, e^{-i\frac{\omega\xi}{v}}\, d\xi. \tag{25}$$

Это выражение отличается от аналогичного соотношения (8) наличием множителей $A(\omega)$ и $A^*(\omega)$, поэтому все особенности в величине потерь растянутым диском определяются структурой выражения (25).

Поляризационные потери по-прежнему описываются соотношениями (11)—(12) с заменой величины Q на $A(\omega_0)$, ω_0 — частота, при которой диэлектрическая проницаемость обращается в нуль. Заметим, что поляризационные потери можно существенно уменьшить, если структура функции $A(\omega)$ такова, что $A(\omega_0) \simeq 0$. Это может оказаться существенным при прохождении заряженных сгустков через плазму.

Потери энергии на черенковское излучение в предположении, что дисперсия у диэлектрика отсутствует, равны

$$\left(-\frac{dw}{dz}\right)_{\text{чер}} = \frac{4}{R^2\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\omega_n)\, A^*(\omega_n)}{\chi_n^2}, \tag{26}$$

---

* Под условием когерентности будем понимать условие, при котором энергия, теряемая системой из N частиц, в N^2, а не в N раз превышает энергию, теряемую той же системе отдельной частицей.

где

$$\omega_n = \frac{\chi_n c\beta}{\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}}. \tag{27}$$

Исследуем выражение (26) в различных частных случаях, представляющих интерес. Если плотность зарядов в диске постоянна, тогда выражение (24) переходит в (15) с учетом изменившейся толщины диска. Условие когерентности принимает в этом случае тривиальный вид $\omega_n h / v \ll 1$, а потери энергии одной частицей на излучение увеличиваются в N раз, N — число частиц в сгустке.

Предположим теперь, что плотность частиц в сгустке непостоянна и в результате каких-либо причин (например, теплового движения) имеет размытость, описываемую гауссовой кривой ($2\xi_0$ — ширина сгустка)

$$\rho(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \rho_0 e^{-\frac{\xi^2}{2\xi_0^2}}; \quad \rho_0 = \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi)\, d\xi.$$

В этом случае величина $A(\omega)$ равна

$$A(\omega_n) = Qe^{-\frac{\omega_n^2 \xi_0^2}{2v^2}}, \quad Q = 2\pi R^2 \xi_0 \rho_0.$$

Условие когерентности состоит в этом случае в требовании, чтобы размытость диска была малой по сравнению с длиной волны в волноводе. Потери энергии на каждую гармонику в волноводе экспоненциально падают с номером гармоники, а потери энергии одной частицей на излучение увеличиваются в $Ne^{-\frac{\omega_n^2 \xi_0^2}{v^2}}$ раз, где N — число частиц в сгустке.

Для многих приложений (например, для теории лампы с бегущей волной в приближении заданного распределения зарядов) интересно знать потери энергии не отдельным диском или сгустком, а цепочкой равноудаленных сгустков. Пусть L_n означает расстояние между центрами дисков или сгустков, тогда

$$\int_{-h}^{h} \rho(\xi) e^{-i\frac{\omega\xi}{v}} d\xi = \sum_{n=0}^{N_1} \int_{L_n}^{L_n+1} \rho(\xi) e^{-i\frac{\omega\xi}{v}} d\xi$$

(общее число сгустков равно $N_1 = 2h / L$). Если предположить, что все сгустки идентичны и расстояния между ними строго одинаковы, то в этом случае $\rho(\xi + L) = \rho(\xi)$,

$$A(\omega) = \pi R^2 \int_0^L \rho(\xi) e^{-i\frac{\omega\xi}{v}} d\xi \frac{\sin\frac{N_1 L\omega}{2v}}{\sin\frac{L\omega}{2v}} e^{i\psi},$$

и можно говорить о когерентности излучения отдельных сгустков. Если выполняются условия когерентности $N_1 L\omega / 2v \simeq n\pi$, то потери энергии отдельной частицей сгустка возрастают в N_1 раз. При неограниченном увеличении числа сгустков потери энергии отдельной частицей также неограниченно возрастают. В реальных условиях удовлетворить условию когерентности для бесконечного числа дисков невозможно. Это обстоя-

ельство можно учесть, предположив, что $\rho(\xi)$ не является строго пери-дической функцией. Предположим, например, что

$$\rho(\xi + L) = e^{-\frac{L}{L_0}} \rho(\xi),$$

де L_0 — длина, охватывающая сгустки, излучающие еще когерентно длина когерентности). Тогда

$$A(\omega) A^*(\omega) = \frac{1}{2} \left| \pi R^2 \int_0^L \rho(\xi) e^{-i\frac{\omega\xi}{v}} d\xi \right|^2 e^{\frac{L}{L_0}} \left(\frac{1 - e^{-\frac{2N_1 L}{L_0}} - 2e^{-\frac{N_1 L}{Z_0}} \cos\frac{N\omega L}{v}}{\operatorname{ch}\frac{L}{L_0} - \cos\frac{\omega L}{v}} \right),$$

величина потерь оказывается конечной для любого числа сгустков.

В заключение выражаю глубокую благодарность Я. Б. Файнбергу а ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

. В. Л. Гинзбург, Докл. АН СССР, 1947, **56**, 699.
. M. Abele, Nuovo cimento, supplim., 1952, 9, 207.
. A. I. Akhiezer, Ja. B. Fainberg, G. Ja. Liubarski, CERN Symp., 1956, **1**, 220.
. Б. М. Болотовский, Успехи физ. наук, 1957, **62**, 201.
. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.
. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГТТИ, 1957.

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
4 V 1959

1960 № 4

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗРЯДА В ИОННОМ НАСОСЕ И МАГНИТНОМ ИОНИЗАЦИОННОМ МАНОМЕТРЕ

Э. М. Рейхрудель, Г. В. Смирницкая, М. Н. Васильева

Исследуются характеристики и процесс зажигания электрического разряда в трубке с холодным катодом при низких давлениях во внешнем магнитном поле. Ранее [1, 2] было показано, что при определенных условиях в разряде может образоваться ряд резко выраженных областей ионизации, причем возникновение пространственных зарядов и перестройка их отражаются на характеристиках разряда. В настоящей статье приводятся вольтамперные характеристики разряда и дается распределение ионов по скоростям вблизи катода, а также сопоставляются процессы, сопровождающие зажигание разряда в магнитном поле, с процессами в вакуумной искре.

1. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИОННЫЕ ТОКИ

На рис. 1 показаны вольтамперные характеристики разряда при различных давлениях газа. При давлениях, меньших 10^{-5} *мм* рт. ст., кривые имеют возрастающий характер (кривая *1*). С увеличением давления (10^{-5}—10^{-4} *мм* рт. ст.) появляются максимумы, которые с ростом давления сдвигаются в сторону бóльших напряжений (кривые *2*, *3*, *4*). При еще бóльших давлениях (10^{-3} *мм* рт. ст.) кривая зависимости разрядного тока от напряжения сглаживается и вновь становится возрастающей (кривая *5*).

Зависимость разрядного тока от напряжения при различных значениях магнитного поля представлена на рис. 2. Как видно из рисунка, с увеличением магнитного поля максимумы вольтамперных характеристик сдвигаются в сторону бóльших напряжений и при достаточно больших полях (840 *эрс*) исчезают. Следовательно, увеличение магнитного поля проявляется так же, как повышение давления.

На рис. 3 приведены кривые распределения ионов по энергиям. Кривые *1* и *2* сняты методом задерживающего потенциала с коллектором, помещенным на оси трубки за катодом, в центре которого имелось отверстие. Кривые *1* и *3* получены при разрядном токе, соответствующем максимуму, а кривые *2* и *4* — минимуму разрядного тока на вольтамперной характеристике. Эти кривые обнаруживают несколько групп ионов, отличающихся по энергиям примерно на 250 *в*. Наличие нескольких групп ионов может быть объяснено их образованием в различных местах разряда, т. е. существованием в разряде нескольких областей ионизации. Число последних зависит от напряжения, давления, магнитного поля. При уменьшении разрядного тока с увеличением напряжения уменьшается число этих областей и в распределении отсутствуют быстрые ионы (рис. 3, кривые *2* и *4*). Это связано с образованием в плоскости анода отрицательного пространственного заряда, ведущего к понижению потенциала в центре трубки и приближению границы области катодного падения к плоскости катода. При этом часть ионов, образующихся в анодной плоскости, участвует в компенсации отрицательного пространственного заряда, поэтому в кривой распределения ионов по энергиям эта группа ионов отсутствует. Существование нескольких групп ио-

разных скоростей следует принимать во внимание при использовании ного разряда в качестве ионного источника.

Искажения, вносимые пространственными зарядами, различны при ных давлениях. При низких давлениях порядка 10^{-6} *мм* рт. ст., когда одные области распространяются почти на весь разрядный проме-гок и плотности токов малы, искажения, вносимые пространствен-ми зарядами, незначительны; кривые тока как функции напряжения обнаруживают максимумов. При ьших давлениях порядка 10^{-3} *мм* ст. отдельные области ионизации екрываются, распределение потен-ла сглаживается [1,2] и максиму-в кривых тока как функции на-жения пропадают.

Рассмотрение вольтамперных ха-теристик и распределения ионов энергиям подтверждает сделанные ее [2] выводы о существовании в ряде при определенных условиях ко выраженных областей простран-енных зарядов, перестройкой ко-ых объясняется ряд явлений, на-одаемых в разряде.

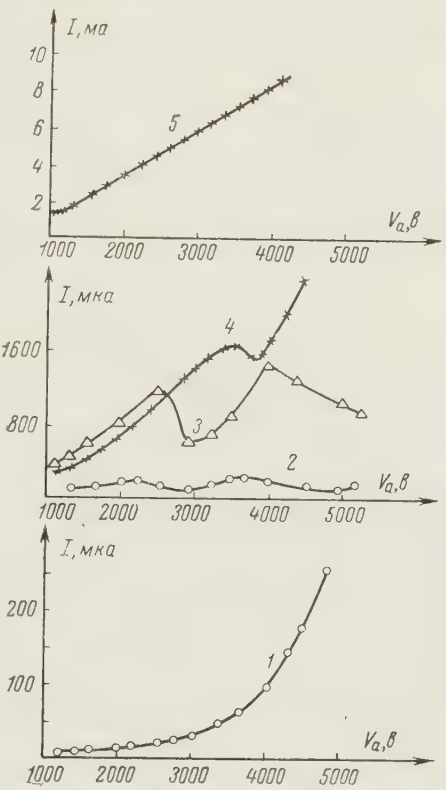


Рис. 1. Зависимость разрядного тока от напряжения. Параметр — давление газа:

1 — $p = 9 \cdot 10^{-6}$ *мм* рт. ст., $H = 700$ *эрс*; *2* — $p = 6 \cdot 10^{-5}$ *мм* рт. ст., $H = 350$ *эрс*; *3* — $p = 2 \cdot 10^{-4}$ *мм* рт. ст., $H = 350$ *эрс*; *4* — $p = 6 \cdot 10^{-4}$ *мм* рт. ст., $H = 350$ *эрс*; *5* — $p = 6 \cdot 10^{-3}$ *мм* рт. ст., $H = 350$ *эрс*

2. ЗАМЕЧАНИЯ О ЗАЖИГАНИИ РАЗРЯДА И ВАКУУМНОЙ ИСКРЕ

Исследование процесса установле-разряда в магнитном поле при ких давлениях (10^{-6} —10^{-8} *мм* ст.), в частности наблюдающееся ягивание зажигания [3], позво-т сделать некоторые заключения оли газов, выделяющихся из элек-дов в условиях вакуумного про-. Большие времена затягивания жигания (достигавшие нескольких ут) позволили вести измерения а в предразрядный период по елочному прибору. В процессе жигания наблюдается медленное чкообразное нарастание тока, орое при определенном значении тока приводит к резкому увели-ию последнего и зажиганию самостоятельного разряда.

Такой характер изменения тока при зажигании объясняется появле-м микроразрядов и выделением газа при ионной бомбардировке из ствующих участков катода в предразрядной стадии. Небольшие чки тока могут быть объяснены последовательным переходом катод-о падения потенциала от нормального к аномальному на отдельных ттирующих участках катода. Число этих участков увеличивается, рядный ток в целом нарастает, возникает аномальное катодное па-ие потенциала около всей поверхности катода и зажигается самостоя-ьный разряд.

Аналогичным путем развивается пробой короткого разрядного проме-тка в высоком вакууме (вакуумной искры) в отсутствие магнитного я [4—6]. Осциллограммы тока, полученные при исследовании работы одного катода с поджигающим устройством в высоковольтном импульс-разряде в высоком вакууме, также обнаруживают в начальной стадии

разряда колебания и ступеньки, не связанные с внешним контуро
Длительность отдельных всплесков тока на осциллограмме — поряд
10^{-7}—10^{-8} *сек*, при общей длительности импульса порядка 10^{-6} *сек*. М
крофотография края холодного катода с поджигающим электродом
показывает образование местных источников эмиссии в виде конусо
правильно распределенных по всему краю катода и ориентирован
в направлении поля.

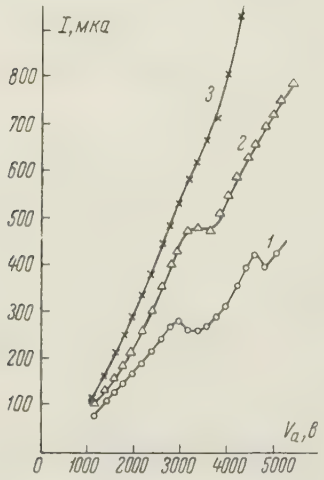


Рис. 2

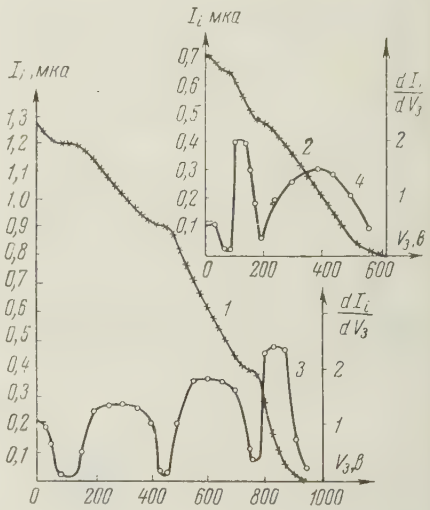


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость разрядного тока от напряжения. Параметр — магнитное по
$p = 6 \cdot 10^{-5}$ *мм* рт. ст.:
1 — $H = 490$ *эрс*; *2* — $H = 630$ *эрс*; *3* — $H = 840$ *эрс*

Рис. 3. Зависимость ионного тока I_i от задерживающего потенциала $V_з$ (*1*, *2*). Кр
вые распределения ионов по энергиям (*3*, *4*), $p = 2 \cdot 10^{-5}$ *мм* рт. ст., $H = 350$ *э*
1, *3* — $V_a = 2000$ *в*; *2*, *4* — $V_a = 2400$ *в*

Развитие пробоя в высоком вакууме можно представить так. При сил
ных электрических полях, коротких разрядных промежутках (в отсутств
магнитного поля) выход первичных электронов начинается с отдельны
эмиссионных центров на катоде. Эти электроны вызывают появление и
нов газа и металла из анода. Ионы бомбардируют источники эмисси
и, разогревая их, усиливают выделение газов и выход электронов. И
низация выделившегося газа и паров приводит к возникновению пол
жительного пространственного заряда вблизи этих мест. В результа
последующего расплывания пространственного заряда усиливаются по
вблизи других возможных источников эмиссии, которые включают
как новые центры; так развивается аномальное катодное падение поте
циала по всей поверхности катода и происходит пробой промежутка.

В случае слабых электрических полей зажигание разряда мож
наступить лишь при определенной конфигурации электрического и ма
нитного полей, затрудняющих уход электронов из промежутка. В эт
условиях становится эффективной понизация электронами, образова
шимися в объеме, а также эмиссия электронов из катода под действи
ионов из объема. Подготовка условий для зажигания разряда идет в дал
нейшем аналогичным путем, а именно, зажигание связано с эмисси
электронов и выделением газа из отдельных участков катода под дей
вием ионной бомбардировки и возникновением необходимого катодно
падения потенциала.

ВЫВОДЫ

1. Вольтамперные характеристики разряда с холодным катодом в магнитном поле обнаруживают ряд максимумов, число которых зависит от параметров разряда.

2. Распределение ионов по энергиям в закатодном пространстве позволяет наличие нескольких групп ионов, отличающихся по энергиям приблизительно на 250 *в*.

3. Особенности вольтамперных характеристик и распределения энергий ионов подтверждают существование в разряде при определенных условиях нескольких областей ионизации.

4. Из рассмотрения процессов зажигания разряда в магнитном поле и сопоставления их с вакуумным пробоем в высоковольтном разряде следует, что первоначальной стадией всякого пробоя в высоком вакууме или наличии холодного катода является возникновение отдельных эмиттирующих центров на катоде и выделение из них газа и паров металла под действием ионной бомбардировки.

ЛИТЕРАТУРА

Э. М. Рейхрудель, А. В. Чернетский, В. В. Михневич, И. А. Васильева, ЖТФ, 1952, **22**, 12, 1945.
Э. М. Рейхрудель, Г. В. Смирницкая, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, **1**, 2, 36.
Э. М. Рейхрудель, Г. В. Смирницкая, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, **1**, 2, 45.
Э. М. Рейхрудель, Т. А. Титова, Тр. совещания по катодной электронике, 1951; Изд. АН УССР, 1952, стр. 134.
Э. М. Рейхрудель, А. Г. Зимелев, А. В. Кустова, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1956, **20**, 10, 1153.
W. Dyke, J. Trolan, Phys. Rev., 1953; **91**, 5, 1043; **89**, 4, 799.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
1 VI 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 4

МИКРОКИНОСЪЕМКА ПОВЕРХНОСТЕЙ ЭЛЕКТРОДОВ В ПРЕДПРОБОЙНОЙ ФАЗЕ И ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОБОЕ В ВЫСОКОМ ВАКУУМЕ*

А. А. Разин, Л. В. Тарасова, В. А. Цукерман

При помощи микрокиносъемки показано, что поверхность электродов в высоком вакууме изменяет свой микрорельеф как при пробоях, так и в предпробойной фазе. При сильном загрязнении поверхностей электродов маслом под действием электрического поля возникают выступы, образованные масляной пленкой. При меньшей загрязненности электродов наблюдается рост металлических острий и их отрыв, сопровождающийся пробоем вакуумного промежутка. Эти эксперименты подтверждают гипотезу роста металлических острий и их отрыва с поверхностей электродов под действием постоянных электрических полей в 10^5—10^6 *в/см* и бомбардировки поверхностей электродов заряженными частицами [1].

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение электрического пробоя в двухэлектродном вакуумном зазоре обусловлено процессами, происходящими на поверхностях электродов при наложении высокого напряжения. Многие исследователи придерживаются гипотезы, объясняющей возникновение электрического пробоя при напряжениях, превышающих 20 *кв*, и электрических полях, близких к равномерным, отрывом от поверхностей электродов многоатомных заряженных частиц и соударением их с противоположным электродом [2—5]. Выделяемая при этом энергия обеспечивает получение высоких локальных температур и испарение металла. Последующие фазы электрического пробоя развиваются с участием паров металла.

Масса и электрический заряд частицы, вызывающей пробой, определяются конкретными условиями опыта: общим напряжением, напряженностями поля на катоде и аноде, материалом и состоянием поверхностей электродов. Частицы, несколько отличающиеся по своим характеристикам, будут лишь участвовать в предпробойном токе. Наличие многоатомных заряженных частиц в вакуумном зазоре в предпробойной фазе подтверждается опытами по исследованию переноса металла с одного электрода на другой [1]. В этих экспериментах показано, что заряд многоатомной частицы на несколько порядков меньше числа атомов в ней, однако остаются неизвестными размеры частиц.

Было высказано предположение, что эти частицы возникают за счет роста и последующего отрыва острий с поверхности электрода под действием электрического поля и бомбардировки заряженными частицами. Непосредственное наблюдение такого процесса представляет большой интерес. Поэтому было решено провести исследования явлений, протекающих на поверхностях электродов, в условиях, позволяющих применение оптических средств регистрации при значительных увеличениях и временно́м разрешении, обеспечиваемом обычной киносъемкой.

В первой стадии работы для обнаружения эффекта роста острий про-

---

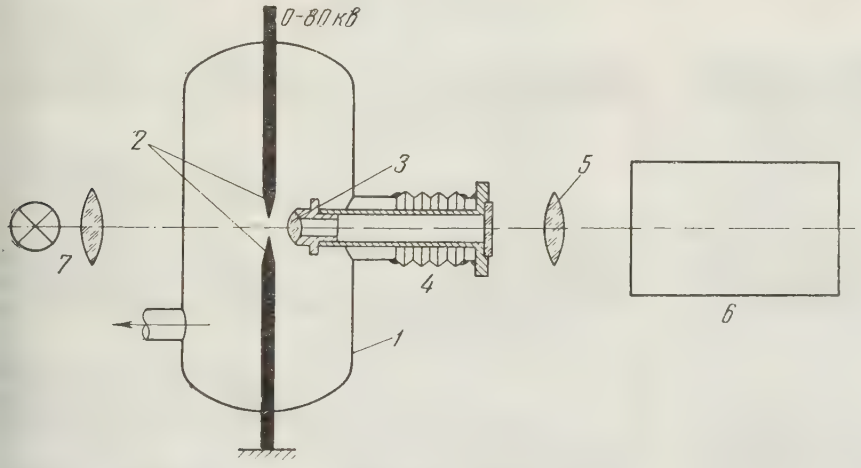
* Доложено на 2-й Всесоюзной конференции по газовой электронике, октябрь, 1958 г.

дилась микрокиносъемка электродов, сильно загрязненных маслом. нее было обнаружено, что примененная методика позволяет иссле- ть явления и при сравнительно чистых поверхностях.

Хотя описываемые ниже опыты в ряде отношений существенно от- ются от условий, в которых обычно работают электроды в электро- умных изделиях (специальная геометрия электродов, наличие пленки а), выявленные закономерности позволили наглядно показать из- ния рельефа электродных поверхностей в предпробойной и пробой- фазах в высоком вакууме.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На рис. 1 изображена установка для микрокиносъемки поверхностей тродов в высоком вакууме. Камера *1* представляет собой стеклян- баллон, в который введены медные электроды *2* — стержни диамет- 2 *мм*. Обращенные друг к другу рабочие поверхности электродов,



ис. 1. Установка для микрокиносъемки явлений на поверхностях электродов в высоком вакууме

оложенные в фокальной плоскости микрообъектива *3*, имеют кони- ие заточки с радиусом при вершине около 0,1 *мм*. Сильфон *4* служит осевого перемещения объектива при наводке. Разрешающая способ- ь примененного здесь микрообъектива около 1 *мк*. Второй объектив = 50 *мм*, $F = 1 : 1{,}5$) проектирует изображение электродов в кость кинопленки.

ами применялась кинокамера *6* типа Киев 16-С с частотой съемки адра в секунду. Источник света *7* с лампой накаливания помещен на олжении оптической оси за вакуумным зазором. Это обеспечивает чение профильных фотографий электродов с экспозициями каждого а около 0,01 *сек* при сравнительно небольшой чувствительности пленки (45 ед. ГОСТ'а).

се опыты производились при давлении $\sim 10^{-5}$ *мм* рт. ст. и непрерыв- откачке вакуумного объема масляным диффузионным насосом без раживания паров масла. В первой серии опытов электроды были по- ы значительной пленкой масла. В таком состоянии они обычно на- тся, если система откачивается паромасляным насосом в течение льких дней.

о второй серии опытов электроды перед съемкой были вымыты че- хлористым углеродом и этиловым спиртом, но пары масла не вы- живались. Такие условия аналогичны постановке опытов при об-

наружении переноса многоатомных частиц с использованием техни меченых атомов.

Микрокиносъемка производилась при медленном увеличении нап жения со скоростью порядка нескольких киловольт в секунду. Выхо ная емкость высоковольтной установки составляла 5500 *пф*. Для ог ничения разрядных токов в контуре имелось активное сопротивле 60 *ком*. Пробои вакуумного зазора регистрировались визуально и пробою воздушного промежутка, включенного в разрядную цепь.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Наиболее наглядно кинетика явлений на поверхности электродов я являлась при демонстрации полученных фильмов узкопленочным ки проектором с частотой 10—16 кадров в секунду (замедление 1 : 6 1 : 4). Увеличение на экране составляло 1000—2000. При этом можно было отчетливо наблюдать изменение формы поверхности электродов,

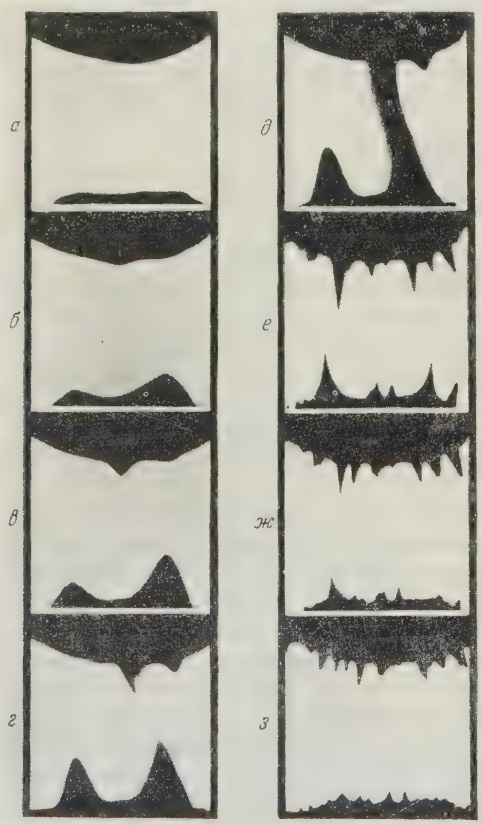


Рис 2.

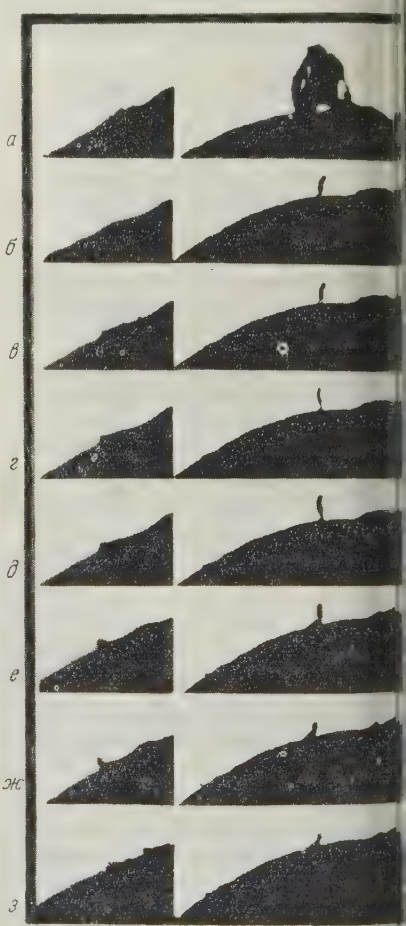


Рис 3.

Рис. 2. Рост масляных выступов на поверхностях электродов при изменении нап жения:

а — 3,2 *кв*; *б* — 3,9 *кв*; *в* — 4,2 *кв*; *г* — 4,8 *кв*; *д* — 4,9 *кв*; *е* — 8,1 *кв*; *ж* — 8,8 *кв*; *з* — 9,5 *кв*

Рис. 3. Перемещение частиц и рост металлического острия на поверхности ано

а — 20 *кв*; *б* — 38 *кв*; *в* — 42 *кв*; *г* — 50 *кв*; *д* — 66 *кв*; *е* — 75 *кв*; *ж* — 79 *кв*; *з* — 80 *кв*

перемещение крупных частиц, рост и исчезновение отдельных остр сопровождающиеся пробоем.

На рис. 2—6 приведены характерные фотографии, полученные у личением отдельных кадров фильма. На рис. 2 представлены результа

ой серии опытов, когда поверхности электродов были покрыты сравльно толстой пленкой масла. Расстояние между электродами ~0,1 *мм*, ичение 290 раз, верхний электрод — катод, нижний — анод.
При напряжении 3,9 *кв* (рис. 2, *б*) на поверхностях электродов возют заметные выступы, образованные пленкой масла. С увеличением яжения выступы удлиняются и при подходящих условиях (малое тояние между электродами и большое количество масла на них) т образоваться «мостики» из масла. Такой мостик хорошо виден на рис. 2, *д*. На кадрах, соответствующих рис. 2, *г*, *е*, *ж*, *з*, также имеются подобные перемычки в виде тонких нитей или, возможно, струй масла,

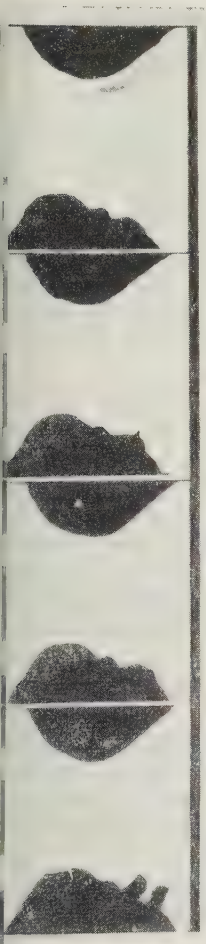


Рис. 4

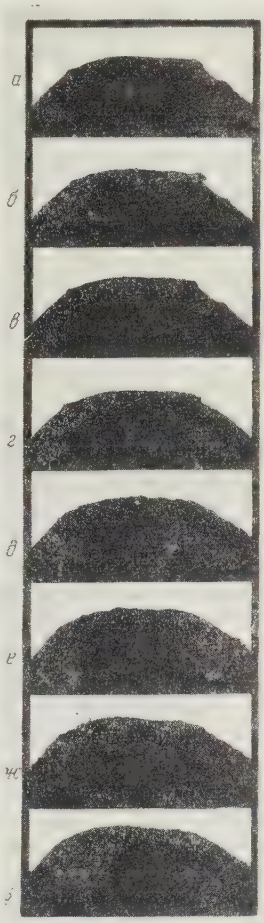


Рис. 5

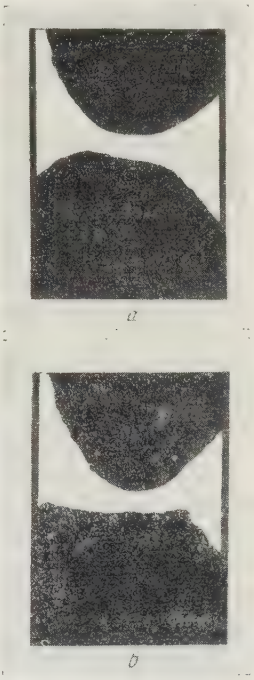


Рис. 6

4. Отрыв сравнительно крупной частицы с поверхности анода, не сопровождающийся пробоем:
а — 22,5 *кв*; *б* — 23 *кв*; *в* — 25 *кв*; *г* — 25,5 *кв*

5. Изменение профиля поверхности анода в предпробойной фазе и при пробоях:
а — 6 *кв*; *б* — 7,9 *кв*; *в* — 8 *кв*; *г* — 20 *кв*; *д* — 32 *кв*; *е* — 35 *кв*; *ж* — 37 *кв*; *з* — 39 *кв*

6. Перенос металла с анода на катод при пробоях. Пробивное напряжение 35 *кв*

лне различимых при визуальном наблюдении. На представленном рике их положения соответствуют острым выступам.
Выступы с круглым краем при повышении напряжения становятся ьше, их радиус кривизны уменьшается. Этот радиус может быть близительно вычислен из условия стабильности выступа: $2\sigma/r = E^2/8\pi$. ая часть равенства соответствует силе поверхностного натяжения,

σ — коэффициент поверхностного натяжения, r — радиус кривизн
Правая часть выражает силу, действующую на поверхность масла
счет электрического поля, E — напряженность поля. Приблизите
ный расчет радиусов кривизны для разных напряженностей дает р
зультат, совпадающий с экспериментальными данными.

Предпробойные токи, соответствующие условиям, при которых пол
чен рис. 2, невелики; они не превосходят 10^{-8} *а*. Иногда наблюдаются
импульсы тока, не переходящие в пробой. Им соответствуют кратковр
менные локальные вспышки у катода и у анода.

Если толстой пленкой масла покрыт только один из электродов
анод или катод—, то при росте выступов наблюдается перенос мас
на противоположный электрод. После нескольких пробоев маслян
выступы исчезают.

Если электроды вымыты за несколько часов до киносъемки и коли
чество масла на них невелико, то на снимках обнаруживается рост метал
лических острий на поверхности электрода. На рис. 3 приведено изм
нение профиля анода при медленном подъеме напряжения. Расстоян
между электродами ~1 *мм*. Справа — профиль анода при увеличени
в 290 раз, слева — один из участков анода, отпечатанный с того же к
дра при увеличении в 800 раз. На рис. 3, *а* справа видна крупная части
(десятки микрон), слабо связанная с поверхностью анода. Ее отрыв пр
изошел при напряжении 20 *кв* и не сопровождался пробоем вакуумно
зазора.

Отсутствие пробоя при отрыве крупных частиц (десятки микро
подтверждается также снимками, представленными на рис. 4 (увелич
ние 60 раз, внизу анод). Острие, появившееся на рис. 4, *б*, отрывает
также без пробоя (рис. 4, *в*). Кадр рис. 4, *г* снят после пробоя.

На рис. 3, *б—з* справа видна частица длиной ~20 *мк*, достаточ
прочно скрепленная с электродом, которая может, однако, несколько и
менять свое положение при изменении напряженности поля. При напр
жении 38 *кв* частица устанавливается приблизительно перпендикуляр
к поверхности электрода — близко к направлению силовых линий пол
При пробое между электродами, когда напряженность поля резко и
меняется до нуля, а затем возвращается к прежней величине, части
меняет свое положение (рис. 3, *е* и 3, *з*).

Пробой, который произошел перед кадром рис. 3, *е*, был локализова
по-видимому, на вершине анода и сильно изменил профиль вершины
Следующий пробой — перед кадром рис. 3, *з* — произошел на левом кра
анода и изменил вершину незначительно. На снимках, помещенных слев
отчетливо виден рост острия в предпробойной фазе (рис. 3, *а — д*, *ж*)
при электрическом пробое, не локализованном на острие (рис. 3, *е*). О
рываясь, частица вызывает пробой, направленный, по-видимому, в эт
область анода.

На рис. 5 помещены снимки профиля анода при расстоянии межд
электродами ~0,15 *мм* и увеличении 290 раз. Кадры рис. 5, *а* и 5, *б* снят
без пробоев, остальные — после пробоев. Поверхность анода при про
боях становится сильно шероховатой, материал анода интенсивно распы
ляется. Более отчетливо это видно на рис. 6 (увеличение 60 раз, вниз
анод). После многих пробоев (рис. 6, *б*) вершина анода оказалась распы
ленной. Форма катода также изменилась в связи с переносом металл
анода на катод.

Поверхность катода фотографировалась и при больших увеличениях
Из нескольких тысяч кадров, снятых с катода в предпробойной фаз
и при пробое, ни на одном не обнаружены мелкие острия (порядка ми
крона). На катоде имеются лишь крупные частицы (десятки микрон
которые могут менять свое положение под действием высокого напря
жения.

ВЫВОДЫ

1. Микрокиносъемка при увеличениях в сотни раз позволила обна-ить на поверхностях обоих электродов в вакууме частицы неправиль-й формы с размерами в десятки микрон. Под действием высокого на-яжения частицы изменяют свое положение. Отрыв таких больших стиц не приводит к возникновению пробоя.

2. На поверхности анода под действием сильных электрических полей 10^5 —10^6 *в/см* наблюдается рост мелких острий. Пробой вакуумного ромежутка сопровождается исчезновением острия. Размеры острий — рядка микрона — лежат на границе разрешения примененного метода емки.

3. Наблюдаемые закономерности подтверждают высказанное пред-ложение о росте и отрыве металлических острий под действием высокого пряжения в предпробойной и пробойной фазах. Улучшение разрешаю-й способности метода съемки (с целью обнаружения частиц с разме-ми в 10^{-5} *см*) позволит экспериментально обосновать существующие ги-тезы о возбуждении вакуумного пробоя переносом частиц с электродов ием высокого напряжения.

В заключение выражаем глубокую благодарность Л. Н. Воробьевой, инимавшей активное участие в проведении опытов и оформлении ил-страций для настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Тарасова, А. А. Разин, ЖТФ, 1959, **29**, 8, 994.
2. Cranberg, J. Appl. Phys., 1952, **23**, 5, 518.
3. Б. Розанова, В. Л. Грановский, ЖТФ, 1956, **26**, 3, 489.
4. Н. Сливков, ЖТФ, 1957, **27**, 9, 2081.
5. S. Denholm, Canad. J. Phys., 1958, **36**, 4, 476.

Поступила в редакцию
30 VII 1959

1960 № 4

ИЗМЕРЕНИЕ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ 70 *кэв* ИОНОВ ЛИТИЯ В ГАЗАХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ АНАЛИЗАТОРОМ

Ю. М. Кушнир, А. Н. Кабанов, Л. Н. Крутякова

Изложены результаты исследования энергетического состава пучка ионов лития после его взаимодействия с гелием, аргоном, кислородом, азотом и воздухом. Исследования проводились при помощи электростатического анализатора энергий, разрешение которого для ионов лития с энергией 70 *кэв* составляло 0,4—0,5 *эв*.

ВВЕДЕНИЕ

Анализаторы энергий с электростатической линзой широко применяются при экспериментальных исследованиях процессов неупругого рассеяния электронов твердыми и газообразными телами. Однако область применения анализатора этого типа не ограничивается только такого рода исследованиями. В принципе такой анализатор может измерять потери энергии любых заряженных частиц. В этой связи представляет интерес использовать анализатор для измерения потерь энергии ионов в различных газах, особенно при энергиях ионов порядка нескольких десятков килоэлектроновольт. Для столь высокой энергии ионов анализатор энергий этого типа является, по существу, единственным прибором с высокой разрешающей способностью, позволяющим измерять потери энергии прямым методом. Тем не менее такого рода исследования еще не проводились.

Ниже описываются первые опыты по применению анализатора с электростатической линзой для измерения потерь энергии 70 *кэв* ионов лития в некоторых газах.

1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

В работе [1] описаны конструкция и схема питания электростатического анализатора скоростей электронов на 75 *кв*. С некоторыми изменениями этот анализатор применялся в наших опытах с ионными пучками. Изменения главным образом свелись к замене высоковольтного выпрямителя с отрицательной полярностью напряжения выпрямителем с положительной полярностью и источника электронов — источником ионов. В качестве последнего использовался сподумен, нанесенный на вольфрамовую нить. При нагреве такого термоионного источника до температуры 1000—1300° С эмиттируются в основном ионы изотопа лития (Li_7^+), которые и использовались в наших экспериментах. Выбор этого источника обусловливался относительной простотой его применения в анализаторе.

Поступление исследуемого газа в колонну анализатора осуществлялось через узкое отверстие камеры напуска газа и регулировалось игольчатым клапаном. Это выходное отверстие диаметром 0,1 *мм* располагалось вблизи оптической оси анализатора. В зоне отверстия давление поступающего газа могло изменяться в пределах $1 \cdot 10^{-3}$ —$1 \cdot 10^{-2}$ *мм* рт. ст.

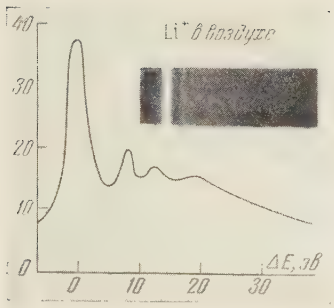


Рис. 1. Фотометрическая кривая спектра и фотография энергетического спектра ионов лития, прошедших сквозь воздух

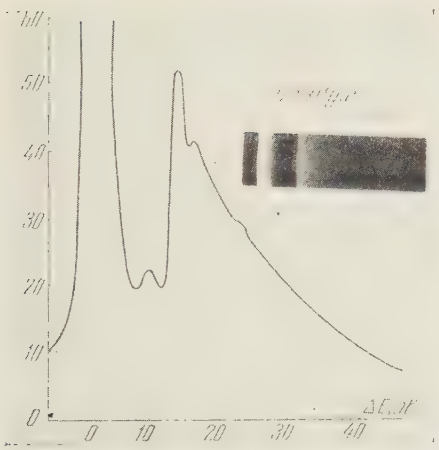


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для электронов тех же энергий

При этом, благодаря применению мощной откачной системы, давление в колонне анализатора оставалось неизменным и равным $1 \cdot 10^{-4}$ *мм* рт. ст.

Как и в опытах с электронами, оптическая схема анализатора состояла из источника заряженных частиц, электростатического конденсора, регулирующего угловую апертуру ионного пучка в зоне камеры напуска газа, и электростатической анализирующей линзы. Пучок ионов лития, создаваемый ионной пушкой, фокусировался конденсором в узкий зонд, который и взаимодействовал в некотором объеме вблизи выходного отверстия камеры с атомами или молекулами газа. Упруго- и неупруго-рассеянные ионы поступали через узкую (шириной в 2—3 *мк*) щель в анализирующую линзу, которая и создавала энергетический спектр. Спектры, один из которых представлен на рис. 1, наблюдались на флуоресцирующем экране и регистрировались на электронографических фотопластинках. Сравнительно небольшая чувствительность этих фотопластинок к ионному облучению не всегда позволяла применять микрофотометрический метод оценки потерь энергии ионов. Поэтому при оценке потерь энергии ионов в большинстве случаев использовался измерительный микроскоп типа УИМ-21, который позволял измерять расстояния между линиями или полосами потерь энергии ионов с точностью до 0,001 *мм*.

Энергетические спектры ионов, как это видно из рис. 1, представляли собой узкую полосу (упруго-рассеянные ионы), по одну сторону от которой на общем диффузном фоне расположено несколько дискретных линий или полос с различной шириной и интенсивностью почернения. Последние соответствуют ионам, претерпевшим неупругие соударения с атомами или молекулами газа. Масштаб по оси энергий на спектрах определялся при помощи фотографий градуировочных эталонов *, представлявших собой серию изображений входной щели, сфотографированных на одной фотопластинке при различных точно измеренных величинах ускоряющего напряжения. Для каждого рода газа фотографировались пять энергетических спектров и пять соответствующих градуировочных эталонов. Приводимая ниже в таблицах точность оценки потерь энергии ионов соответствует наибольшим отклонениям величин потерь, измеренных на пяти фотопластинках, от среднеарифметического значения.

Все измерения проводились при ускоряющем напряжении 70 *кв* и токе ионного пучка порядка 2—5 *мка*. При этом диапазон изменений потерь энергии ионов лития, в котором анализатор сохранил неизменными величины разрешения 0,4—0,5 *эв* и дисперсии 0,15—0,20 *мм/в*, составлял примерно 100—120 *эв*.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Потери энергии 70 *кэв* ионов лития измерялись при взаимодействии ионов как с атомарными (гелий и аргон), так и с молекулярными газами (азот, кислород и воздух). Результаты измерений сравниваются с результатами наших аналогичных исследований энергетического состава электронов после их взаимодействия с теми же газами. Один из энергетических спектров электронов (для воздуха) в качестве примера представлен на рис. 2.

Первые опыты по измерению потерь энергии ионов лития были проведены с инертными газами, схемы энергетических уровней которых хорошо известны. Результаты этих измерений в гелии и аргоне приведены в табл. 1. Для сравнения представлены также величины потерь энергии электронов в тех же газах при тех же значениях первичной энергии ($E = 70$ *кэв*).

* Достаточно полное описание метода оценки потерь энергии при помощи фотографий градуировочных эталонов приведено в [2].

Гелий. Как видно из табл. 1, в ионном спектре наблюдается большее число линий и полос потерь и они соответствуют более высоким уровням возбуждения и ионизации, чем в электронных спектрах. Этот факт легко объяснить, если учесть, что время взаимодействия ионов с газом вследствие их меньшей скорости, значительно больше, чем у электронов.

Таблица 1

Потери энергии, *эв*			
гелий		аргон	
электроны E = 70 *кэв*	ионы лития E = 70 *кэв*	электроны E = 70 *кэв*	ионы лития E = 70 *кэв*
21,2±0,3		11,4±0,2	
	23,6±0,2	14,0±0,2	13,6±0,4
24,5±0,2	24,5—36,0	15,6±0,1	15,6—27,0
	53,2—54,2		33,0—42,0
	65,0±1,0		
	78,0±1,5		

Линия потерь 23,6 *эв* соответствует переходу атома гелия из основного состояния в группу синглетных возбужденных уровней с главным квантовым числом 4. В наших опытах с электронами эта линия не наблюдалась. Однако подобная линия потерь наблюдалась Дитрихом [3] для электронов с энергией 35 *кэв*. Наличие широкой и интенсивной полосы потерь примерно от 24,5 до 36,0 *эв* может быть объяснено процессом ионизации атома гелия. Размытая полоса потерь 53,2—54,2 *эв*, очевидно, вызвана ионизацией однозарядного иона гелия (спектроскопическое значение потенциала ионизации $\Delta U_{i\,1-2} = 54{,}12$ *эв* [4]). Линия потерь 65,0 ± 1,0 *эв* обусловлена ионизацией атома гелия с одновременным переходом получившегося иона в низшее состояние (24,5 + 40,6 = 65,1 *эв*). Очень слабая размытая полоса потерь вблизи 78 *эв*, видимо, вызвана двукратной ионизацией атома гелия (24,5 + 54,1 = 78,6 *эв*) согласно процессу

$$He + Li^{+} \rightarrow He^{++} + Li^{+} + 2e.$$

Аргон. Первая интенсивная линия потерь 13,6 *эв* соответствует возбуждению атома аргона и в пределах точности измерений совпадает с линией потерь 14,0 *эв*, наблюдавшейся на электронном спектре. Вторая, более широкая линия потерь 15,6 *эв* соответствует ионизации атома аргона. После этой линии начинается сплошной спектр, который заканчивается вблизи значений потерь энергии 27 *эв*. Этой полосе потерь могут соответствовать процессы возбуждения и ионизации однозарядного иона аргона ($\Delta U_{i1=2} = 27{,}49$ *эв*). Следующая полоса потерь примерно от 33,0 до 42,0 *эв*, очевидно, обусловлена процессами возбуждения и ионизации двузарядного иона аргона.

Таблица 2

Потери энергии, *эв*			
азот		кислород	
электроны E=70 *кэв*	ионы лития E=70 *кэв*	электроны E=70 *кэв*	ионы лития E=70 *кэв*
9,63±0,1	9,6±0,3	8,13±0,2	8,13±0,2
12,9±0,15		12,5±0,2	
14,45±0,2	13,6±0,4		
15,62±0,2		15,49±0,2	
16,5±0,3			
19,27±0,3		18,0±0,3	
	17,0—24,0		18,0—22,0
24,14±0,3		21,0±0,4	

Следовательно, значения потерь энергии ионов лития в гелии и аргоне начинаются в основном с величин, соответствующих первому ионизационному потенциалу (возбуждение и ионизация однозарядных атомарных ионов). Для электронов этих же энергий величины потерь не превышают значений энергий возбуждения и однократной ионизации атомов.

В табл. 2 представлены результаты измерений потерь энергий ионов лития в кислороде и азоте, которые сравниваются с величинами потерь энергий электронов тех же энергий.

Азот. На энергетическом спектре наблюдаются две линии (9,6 и 13,6 *эв*) и одна широкая полоса потерь 17,0—24,0 *эв*. Первая, наиболее

Интенсивная линия потерь соответствует затратам энергии ионов на диссоциацию молекулы азота и очень точно совпадает со значением потерь энергии электронов. Сравнительно высокая интенсивность этой линии объясняется большой вероятностью этого процесса, что подтверждается также опытами (см. [5]), в которых установлено, что наиболее вероятным процессом при ионном ударе является диссоциация молекулы. Менее интенсивная линия потерь 13,6 *эв* отождествляется с процессом возбуждения молекулы азота. Линия потерь 15,62 *эв*, наблюдавшаяся в электронных спектрах и соответствующая потенциалу появления молекулярных ионов, в ионном спектре не наблюдалась. Полоса потерь 17,0—24,0 *эв* может быть отождествлена с затратами энергии на возбуждение молекулярных ионов азота и на появление атомарных ионов ($\Delta E \simeq 24$ *эв*).

К и с л о р о д. Наиболее интенсивной является линия потерь 8,13 *эв*, соответствующая процессу возбуждения молекулы кислорода. Аналогичная линия наблюдалась нами в опытах с электронами. Как и в случае азота, отсутствует линия потерь 12,57 *эв*, наблюдавшаяся в электронных спектрах и соответствовавшая потенциалу появления молекулярного иона кислорода. Линия потерь 18,0 *эв*, за которой начинается сплошной спектр вплоть до значений потерь энергий 22,0 *эв*, наблюдалась также и в электронных спектрах.

В о з д у х (рис. 1). Линии потерь энергии, наблюдавшиеся при взаимодействии ионов с воздухом, соответствуют линиям потерь основных составляющих воздуха: азота и кислорода.

Таким образом, значения потерь энергии ионов лития в молекулярных газах в основном совпадают с потерями энергий электронов. Некоторое различие наблюдается в интенсивности линий. Например, в отличие от электронного спектра, где линия потерь 9,6 *эв*, соответствующая энергии диссоциации азота, проявляется в виде линии со слабой интенсивностью почернения, на ионном спектре эта линия потерь является самой интенсивной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первые опыты по применению электростатического анализатора для измерения потерь энергии ионов лития в газах показали, что этот прибор можно весьма эффективно использовать для изучения тонких эффектов неупругого взаимодействия не только электронов, но и любых заряженных частиц. Дальнейшее совершенствование методики измерения расширит возможности анализатора. В частности, применение электрометрических методов регистрации спектров позволит оценивать при помощи этого анализатора не только потери энергии, но и эффективные сечения процессов неупругого рассеяния заряженных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Кабанов, В. И. Милютин, Д. В. Фетисов, Электростатический анализатор скоростей электронов на 75 *кв*, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1959, **23**, 4, 459.
2. А. Н. Кабанов, В. И. Милютин, Электростатическая линза — анализатор скоростей электронов с высокой разрешающей способностью, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 1, 109.
3. W. Dietrich, Verschärfte Messung diskreter Energieverluste von 35 kev-Elektronen an Gasen, Z. Phys., 1958, **152**, 87.
4. Н. А. Капцов, Электрические явления в газах и вакууме, ГИТТЛ, изд. 2-е, 1950, стр. 367.
5. A. Leipunsky, A. Schechter, Dissoziation durch Stoß positiver Ionen, Z. Phys., 1930, **59**, 857.

Поступила в редакцию
6 VI 1959

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ШИРОКОПОЛОСНОМ РАДИОМЕТРЕ С КВАНТОВЫМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ СПЕКТРА

Н. Г. Басов, Н. В. Карлов

Предлагается использовать молекулярную систему с тремя дискретными уровнями энергии для приема теплового излучения в широкой полосе частот. В качестве такой системы подходит, например, система энергетических уровней электронных спинов парамагнитного кристалла, помещенного во внешнее магнитное поле, так как эти уровни имеют значительную ширину. Однако эта ширина не может быть реализована в парамагнитных усилителях, так как для усиления необходима регенерация, приводящая к сужению полосы пропускания.

Рассмотрим парамагнитный кристалл, обладающий тремя дискретными уровнями (*1, 2, 3*) энергии и помещенный в объемный резонатор, настроенный на частоты ν_{13} и ν_{23}, которые соответствуют собственным частотам этого кристалла (рис. 1). Пусть добротность резонатора на частоте ν_{13} такова, что каждый попавший в резонатор квант частоты, близкой к ν_{13}, поглощается в парамагнитном образце, а добротность резонатора на частоте ν_{23} максимально велика. Если в резонатор поступает исследуемое излучение со сплошным спектром вблизи частоты ν_{13} и если температура образца значительно ниже эффективной температуры этого излучения, а добротность на частоте ν_{23} настолько велика, что выполняются условия самовозбуждения, то описываемое устройство будет работать как генератор, преобразующий энергию излучения со сплошным спектром в практически монохроматическое колебание частоты, близкой к ν_{23}. Дальнейшее усиление преобразованного таким образом сигнала может производиться в узкой полосе. Поэтому такое устройство обладает весьма высокой чувствительностью для приема теплового излучения в широкой полосе частот.

Обеспечить выполнение условий самовозбуждения при приеме весьма слабых тепловых излучений практически невозможно. Однако в этом случае индикацию принимаемого излучения можно проводить при помощи вспомогательного источника монохроматического излучения частоты ν_{23}. Пусть интенсивность этого вспомогательного излучения, поступающего в резонатор, такова, что достигается насыщение. При этом, вследствие того, что время спин-спинового взаимодействия T_2 значительно меньше времени спин-решеточной релаксации T_1, половина квантов, поглощенных на частоте ν_{13}, будет переизлучена на частоте ν_{23}, увеличив тем самым мощность излучения, подводимого от вспомогательного источника. Для индикации изменения мощности вспомогательного излучения, обусловленного принимаемым сигналом, целесообразно применить балансную схему, в которой один и тот же высокочастотный генератор используется и как источник вспомогательного излучения, и как источник компенсирующего напряжения (рис. 2).

Рассматривая чувствительность описываемого прибора как модуляционного радиометра, в котором производится периодическая модуляция принимаемого излучения и используется синхронный детектор, находим следующее выражение для наименьшего обнаруживаемого изменения спектральной плотности входных шумов δS:

$$\delta S = \pi F S \sqrt{\frac{\overline{\Delta N}}{\Delta \nu}}, \tag{1}$$

где

$$F = \left[1 + 8\left(\frac{\nu_{13}}{\nu_{23}}\right)^2 \frac{mPG}{S^2 \Delta \nu}\right]^{1/2}, \tag{2}$$

а в свою очередь

$$P \gtrsim \frac{\hbar^2}{\mu^2} \frac{\nu_{23}}{2T_1 T_2} \frac{V}{Q}. \tag{3}$$

Здесь используются следующие обозначения: S — спектральная плотность шумов на входе системы вблизи частоты ν_{13}; ΔN — полоса пропускания выходного прибора; $\Delta \nu$ — полоса приема, равная ширине линии поглощения образца на частоте ν_{13};

G — спектральная плотность входных шумов приемника, измеряющего изменение мощности вспомогательного излучения P; m — коэффициент, характеризующий точность компенсации этой мощности на входе приемника; V — объем резонатора; Q — его добротность на частоте ν_{23}; μ — магнитодипольный момент; $\hbar$ — постоянная Планка.

Величина $F \gtrsim 1$ обусловлена комбинационными шумами и характеризует ухудшение чувствительности по сравнению с идеальным случаем, описанным выше (когда выполнены условия самовозбуждения на частоте ν_{23}). Наибольшей трудностью при осуществлении описываемого широкополосного радиометра с квантовым преобразователем спектра является необходимость значительной компенсации мощности вспомогательного излучения. Так, например, считая, что эффективная температура входных

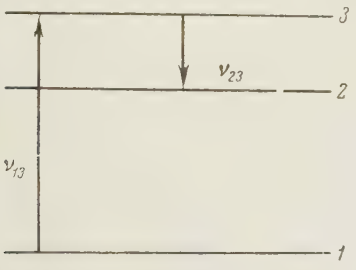


Рис. 1. Схема уровней энергии

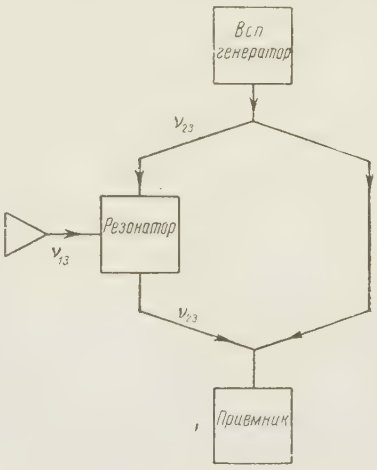


Рис. 2. Блок-схема радиометра

шумов равна 30° К, добротность линии поглощения равна 30 и что для индикации на частоте ν_{23} используется молекулярный усилитель, получим (при $\nu_{13} \simeq 3 \cdot 10^{10}$ *гц*, $\nu_{23} \simeq 10^{10}$ *гц*, $P \simeq 10^{-5}$ *вт* и $m = 10^{-8}$) $F = 5$. Приведенное значение $m = 10^{-8}$ можно получить, используя в качестве вспомогательного источника клистрон при фазовой стабилизации частоты его колебаний с помощью кварцевого резонатора или молекулярного генератора.

Отметим, что описанный радиометр в отличие от молекулярных усилителей с тремя уровнями энергии может принимать сигналы на частотах, более высоких, чем частота вспомогательного излучения.

Выражаем благодарность А. Е. Саломоновичу за полезную дискуссию рассматриваемых здесь вопросов.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступило в редакцию
23 XII 1958

РЕГЕНЕРАТИВНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ НА ДИОДАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТЬЮ

В. П. Тычинский, В. Г. Федоров, П. И. Савилов

Энергетические соотношения в системе, состоящей из генераторов, фильтров и нелинейного реактивного элемента, известные под названием теоремы Мэнли — Роу [1], показывают, что на верхней комбинационной частоте $f^+ = f_в + f_с$ имеет место усиление G^+, которое в предельном случае достигает величины

$$G^+ = \frac{f^+}{f_с} = \frac{P^+}{P_с}, \qquad (1)$$

где $P_с$ — мощность входного сигнала на частоте $f_с$; P^+ — мощность на верхней комбинационной частоте.

При наличии в системе контура, настроенного на разностную комбинационную частоту $f^- = f_в - f_с$, может иметь место регенеративное усиление [3]

$$G^- = \frac{f^-}{f_с} |T|^2 \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}, \qquad (2$$

где $|T|^2 = 4Q_н^с Q_н^- / Q_{вн}^с Q_{вн}^-$ — коэффициент передачи резонансного контура, имеющего

эквивалентную нагруженную добротность $[Q^{c}_{н}Q^{-}_{н}]^{1/2}$ и внешние добротности $Q^{c}_{вн}$ и $Q^{-}_{вн}$; индексы «с» и «—» относятся соответственно к контурам сигнала и разностной частоты; $Q_{н}$, $Q_{вн}$ — нагруженная и внешняя добротности резонаторов; $\varepsilon = m/m_{пор} \simeq \sqrt{P_{в}/P_{пор}}$ — параметр регенерации, характеризующий близость системы к порогу самовозбуждения; $m = \Delta C / C_0$ — глубина модуляции емкости диода; $C = C_0(1 + m \sin 2\pi f_{в} t)$; $m_{пор}$ — значение глубины модуляции, при котором начинается самовозбуждение; $P_{пор}$ — пороговая мощность возбуждения, $P_{в}$ — мощность возбуждения.

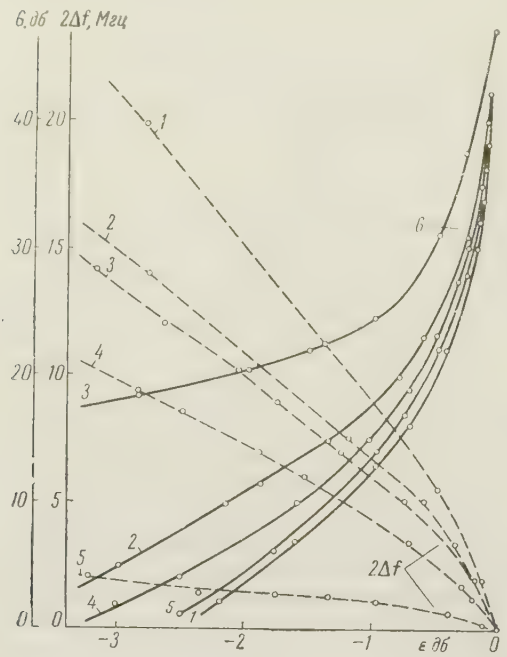


Рис. 1. Зависимость коэффициента усиления G и полосы $2\Delta f$ от параметра регенерации ε:

$1 - f_{c} = 1000$ *Мгц*; $2 - f_{c} = 750$ *Мгц*; $3 - f_{c} = 500$ *Мгц*; $4 - f_{c} = 300$ *Мгц*; $5 - f_{c} = 200$ *Мгц*

Произведение относительной полосы на коэффициент усиления по напряжению для регенеративного усилителя-преобразователя выражается формулой

$$\frac{2\Delta f}{f_{c}} \sqrt{G} \simeq \frac{|T| \sqrt{\dfrac{f^{-}}{f_{c}}\varepsilon}}{Q^{c}_{н}\left[1 + \varepsilon \dfrac{f_{c}}{f^{-}} \dfrac{Q^{-}_{н}}{Q^{c}_{н}}\right]}. \qquad (3)$$

Шум-фактор регенеративного усилителя-преобразователя без учета шумов нагрузки, присоединенной к контуру на частоте f^{-}, согласно расчету имеет величину

$$F \simeq \left(1 + \frac{Q^{c}_{вн}}{Q^{c}_{0}}\right)\left(1 + \varepsilon^{-1} \frac{f_{c}}{f^{-}} \frac{Q^{-}_{н}}{Q^{-}_{0}}\right). \qquad (4)$$

В выражениях (2) — (4) в отличие от работы [3] использованы отношения добротностей вместо отношений соответствующих проводимостей и введен параметр регенерации ε.

Из сравнения формул (1) — (4) следует возможность получения в регенеративном усилителе-преобразователе значительно большего усиления (за счет сужения полосы) и меньшего шум-фактора ($< 1{,}5$ *дб*), чем в нерегенеративном усилителе-преобразователе, рассмотренном в [2], а также целесообразность использования большого отношения частот f^{-}/f_{c}.

Нами были изготовлены и изучены макеты регенеративного усилителя-преобразователя.

Ниже излагаются предварительные результаты экспериментального исследования макета в диапазоне частот 150—1500 *Мгц* при частоте возбуждения 9 — 10 *Ггц*, которые подтверждают целесообразность использования разностной частоты в усилителе-преобразователе.

Блок-схема измерительной установки — обычная (см., например, [4]). В каналах возбуждения и преобразованной частоты использовались узкополосные фильтры. Настройка преобразователя, измерения коэффициента усиления и полосы осуществлялись при помощи анализатора спектра. Измерения шум-фактора производились при помощи приемника и калиброванных шумовых генераторов обычным методом.

На рис. 1 показана серия кривых зависимости коэффициента усиления и полосы усиливаемых частот $2\Delta f$ от параметра регенерации $\varepsilon = \sqrt{P_{в}/P_{пор}}$ для частот сигнала $f_{c} = 200, 300, 500, 750, 1000$ *Мгц*. Добротности контуров Q^{c} и Q^{-} не измерялись, поэтому количественное сравнение с формулами (2) и (3) не произведено.

При мощностях возбуждения $P_в \simeq 0{,}9\,P_{пор}$ ($\varepsilon = -0{,}5$ *дб*) усиление имеет величину порядка 20 — 35 *дб*. Абсолютные значения мощности возбуждения лежали в интервале 15—500 *мвт*.

Качественно было подтверждено увеличение произведения $2\Delta f\sqrt{G^-}$ при повышении мощности возбуждения. На рис. 2 показана типичная амплитудная характеристика на частоте 750 *Мгц* при уровнях мощности возбуждения $P_в = 14; 8{,}8; 3$ *мвт*.

Из графика рис. 2 следует, что коэффициент усиления остается практически постоянным до уровня входных мощностей $10^{-6} — 10^{-5}$ *вт*.

Шум-фактор в указанном выше диапазоне частот имел величину 1,25 — 2 *дб*. Диод работал в режиме автоматического смещения.

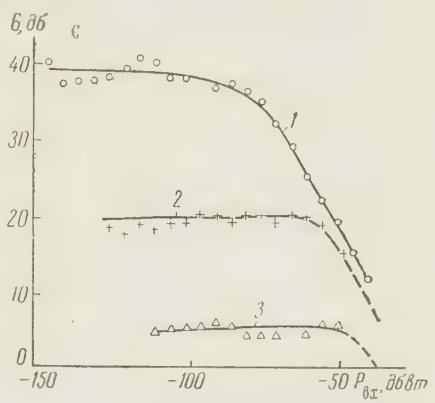


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления от мощности входного сигнала на частоте 750 *Мгц*:

1 — $P_в = 14$ *мвт*; *2* — $P_в = 8{,}8$ *мвт*; *3* — $P_в = 3$ *мвт*

Менее обстоятельно была изучена работа в режиме усилителя-преобразователя. Наибольший коэффициент усиления G^+ при работе на верхней комбинационной частоте не превышал 3 — 5 *дб* при отношении частот $f^+/f_c = 15$. Шум-фактор не измерялся.

Выражаем благодарность А. В. Красилову, В. М. Вальд-Перлову, А. А. Рабинович-Визелю, Н. Е. Скворцовой за любезно представленные диоды и Ю. Т. Деркачу за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Manley, W. E. Rowe, Some general properties of nonlinear elements, Proc. I. R. E., 1956, **44**, 7, 904.
2. D. Leenov, Gain and noise figure of a variable-capacifance up-converter, Bell System Techn., J, 1958, **37**, 7, 989.
3. H. Heffner, G. Wade, Gain, bandwidth and noise characteristics of the variable-parameter amplifier, J. Appl. Phys., 1958, **29**, 7, 1321.
4. J. F. Herrman, M. Uenohara, A. Uhlir, Noise figure measurements on two types of variable reactance amplifiers using semiconductor diodes, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 6, 1301.

Поступило в редакцию
17 VIII 1959

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОКОНТУРНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ

В. П. Тычинский, В. В. Карпецкий

В периодической литературе уже сообщалось об успешном осуществлении малошумящих параметрических усилителей, использующих диоды с нелинейной емкостью [1, 2]. Основы квазилинейной теории параметрических усилителей были изложены в работах Л. И. Мандельштама и его сотрудников. Обстоятельный анализ эквивалентной схемы двухконтурного усилителя был проведен Хеффнером и Вейдом [3].

Целью настоящей заметки является сообщение о некоторых экспериментальных характеристиках одноконтурного параметрического усилителя, который работал на волнах короче 10 *см*.

Блок-схема измерительной установки обычная, с циркулятором. Индикация усиленного сигнала осуществлялась при помощи анализатора спектра и измерительного приемника.

В качестве калиброванного источника шумов использовалась газоразрядная трубка и аттенюаторы. Измерение шум-фактора производилось двумя способами: 1) по двойному превышению над уровнем собственных шумов с использованием калиброванного аттенюатора в тракте шумового генератора; 2) с использованием генератора промежуточной частоты и аттенюатора на этой частоте.

При слабой связи контура с циркулятором пороговая мощность $P_{пор}$, при которой начиналось самовозбуждение, была 7,8 *мвт*. При различных значениях мощности возбуждения $P_в < P_{пор}$ производились измерения полосы $2\Delta f$ на уровне 3 *дб* и коэффициента усиления G.

Зависимость $2\Delta f$, $G(P_в)$ показана на рис. 1. В области, близкой к порогу, $2\Delta f\sqrt{G} = 150$ *Мгц*. Эта величина не является постоянной и уменьшается при снижении $P_в$. Среднее значение из десяти измерений фактора шума дало величину $F_{ср} = 2{,}62$ ед.

Измерения на партии из пяти диодов показали явную зависимость шум-фактора от эквивалентного сопротивления диода R_s. Изменение емкости сказывалось в основном на величине пороговой мощности возбуждения в полном соответствии с работой [2]. Результаты измерений шум-фактора на партии диодов приведены ниже.

F, *дб*	3	3	4,65	8,4	9,55
R_s, *ом*	2,8	2,9	4	3,5	4,9
$C_{мин}$, *мкф*	0,26	0,3	0,24	0,28	0,35

В классической работе Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси [4] рассмотрена работа параметрического усилителя при наличии расстройки контура относительно частоты входного сигнала и показано, что в этом случае также имеет место регенерация.

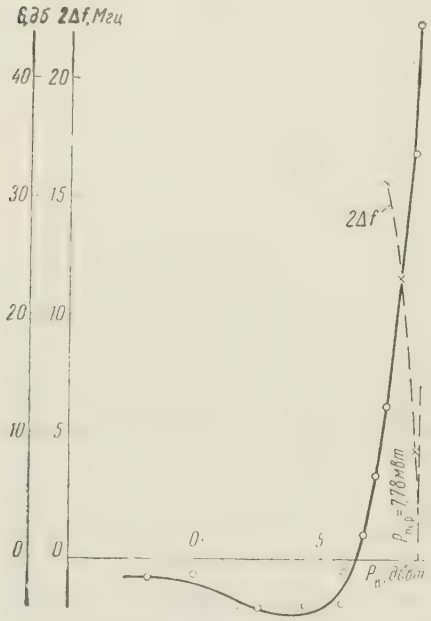


Рис. 1. Экспериментальная кривая зависимости коэффициента усиления G одноконтурного параметрического усилителя от мощности возбуждения $P_в$

Из этого следует, что при фиксированной настройке контура параметрического усилителя f_0 изменение в некоторых пределах частоты возбуждения $f_в = 2f_0 \pm \Delta$ позволяет смещать в интервале $\pm\,\Delta/2$ среднее значение полосы частот усиливаемого сигнала. Это свойство параметрических усилителей было подтверждено экспериментально [5] и по аналогии с электронными приборами получило название электрической перестройки частоты.

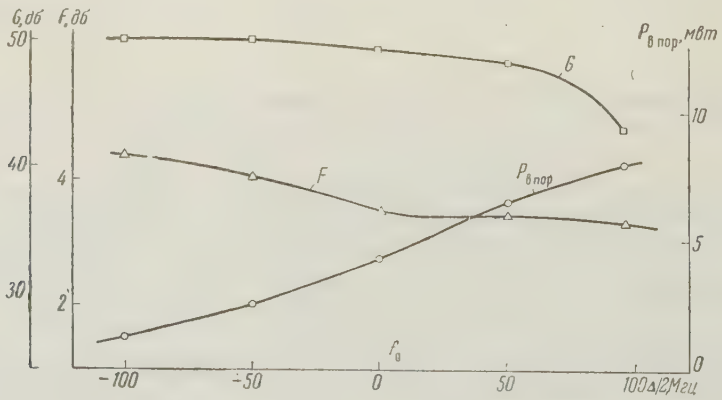


Рис. 2. Изменение шум-фактора F, пороговой мощности возбуждения $P_{в\,пор}$ и коэффициента усиления G в диапазоне электрической настройки

На рис. 2 показано изменение шум-фактора F и пороговой мощности возбуждения в полосе перестройки $\Delta/2 = \pm\,100$ *Мгц*. Вне указанных пределов резко уменьшался коэффициент усиления либо возрастал шум-фактор.

При подборе оптимальной связи контура с нагрузкой было получено минимальное значение шум-фактора $F = 1{,}75$ *дб*. Ширина области электрической перестройки частоты для этого случая не измерялась. Изменение шум-фактора в зависимости от пороговой мощности возбуждения показано на рис. 3. Нагруженная добротность кон-

ура изменялась при этом от 6 до 30. Связь диода с резонатором усилителя устанавливалась минимальной. При всех указанных измерениях диод работал с автоматическим смещением.

Была исследована также амплитудная характеристика усилителя (рис. 4). Линейность характеристики сохранялась до $P_{вх} = 10^{-7}$ *вт*. Мощность насыщения достигала

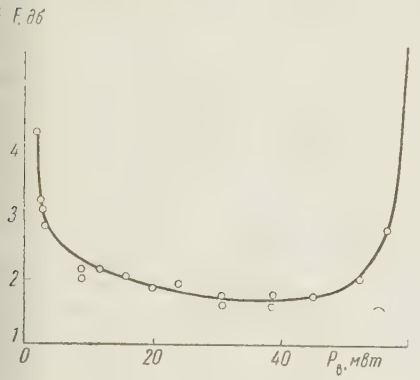


Рис. 3. Изменение шум-фактора F в зависимости от пороговой мощности возбуждения $P_в$

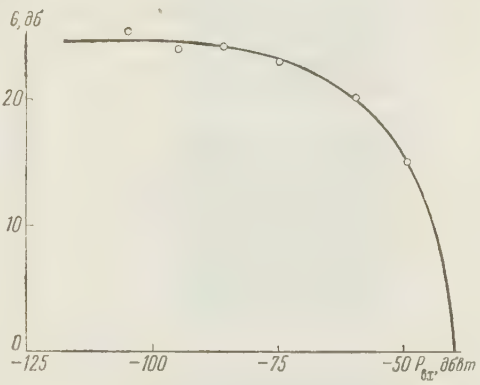


Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления G от входной мощности $P_{вх}$

10^{-4} *вт* при возбуждении $P_в = 6{,}75$ *мвт*. С увеличением мощности возбуждения соответственно увеличивается и мощность насыщения.

Выражаем признательность А. В. Красилову и В. М. Вальд-Перлову, предоставившим диоды с нелинейной емкостью, и Ю. Т. Деркачу за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. F. Herrman, M. Uenohara, A. Uhlir, Noise figure measurements on two types of variable reactance amplifiers using semiconductor diodes, Proc. I. R. E., 1958, 46, 6, 1301.
2. R. C. Knechtli, R. D. Weglin, Low noise parametric amplifier, Proc. I. R. E., 1959, 47, 4, 584.
3. H. Heffner, G. Wade, Gain, bandwidth and noise characteristics of the variable-parameter amplifier, J. Appl. Phys., 1958, **29**, 7, 1321.
4. Л. И. Мандельштам, Полн. собр. трудов, II, Изд. АН СССР, 1947.
5. Е. М. Гершензон, Н. Г. Птицина, Г. И. Рожкова, В. С. Эткин, Об одноконтурном параметрическом усилителе СВЧ на полупроводниковом диоде (направлена для опубликования в журнал Радиотехника и электроника).

Поступило в редакцию
17 VIII 1959

ДЕЛИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ НА ТРЕХСЕТОЧНОМ ОТРАЖАТЕЛЬНОМ КЛИСТРОНЕ

Е. Н. Базаров

ВВЕДЕНИЕ

Для деления частоты в диапазоне СВЧ можно использовать резонанс n-го рода [1, 2, 3, 4]. В работах [2, 3, 4], в частности, проведены теоретическое и экспериментальное исследования резонанса второго рода и синхронизации на втором обертоне на отражательном клистроне. Эксперимент показал, что введение сигнала с частотой $2f$ в обычный резонатор клистрона, фактически имеющего одну резонансную частоту f, сопряжено с большими трудностями, а применение специального «бигармонического» резонатора осложнено как трудностью настройки его на кратные частоты, так и плохой добротностью на них. Поэтому для более эффективного использования возможностей отражательного клистрона был предложен специальный отражательный клистрон с двумя резонаторами на частоты f и $2f$, с тремя или четырьмя сетками (во втором случае между резонаторами имеется пространство дрейфа). В данной статье приведены результаты экспериментального исследования трехсеточного отражательного клистрона.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Здесь *1* — клистро[ный генератор на частоте $2f$; *2*, *5* — аттенюаторы; *3* — генератор пилообразного н[пряжения; *4* — клистрон-делитель; *6* — детектор и осциллограф; *7* — измерите[мощности; *8* — анализатор спектра. Первый (от катода) резонатор клистрона-дел[теля частоты настраивался на частоту $2f$ (~ 5000 *Мгц*), генерируемую генератором [второй, соответственно, на частоту f (~ 2500 *Мгц*). Измеритель мощности и анал[затор спектра, включенные на выход кл[строна-делителя частоты, позволяли произв[дить измерения как амплитудных, так и рез[нансных характеристик делителя. Установ[позволяла производить также визуальное на[блюдение резонансных характеристик, дл[чего на выход делителя включался детекто[сигнал с которого подавался на вертикальны[усилитель осциллографа, а на отражател[клистрона генератора *1* и горизонтальны[усилитель осциллографа подавалось пилооб[разное напряжение. При этом на экране о[циллографа можно было наблюдать резонансны[характеристики. Величина регенерации клистрона-делителя частоты могла плав[но меняться изменением ускоряющего напряжения или напряжения на отра[жателе.

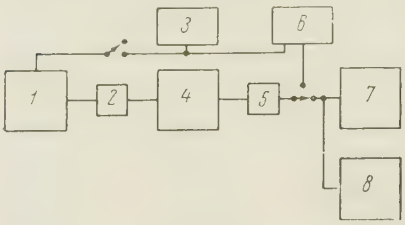


Рис. 1

На рис. 2 представлены зависимости выходной мощности $P_{вых}$ от мощности на входе $P_{вх}$ для разных значений тока катода I_0 и при оптимальных углах пролета электронов в пространстве отражателя. Кривые, начинающиеся на оси абсцисс соответствуют резонансу второго рода, начинающиеся на оси ординат, — синхронизации на втором обертоне.

На рис. 3 представлены зависимости полос резонанса второго рода и синхронизации на втором обертоне от мощности на входе $P_{вх}$ для разных значений тока катода I_0 и при оптимальных углах пролета электронов в пространстве отражателя. В исследуемом клистроне ток катода изменялся изменением ускоряющего напряжения и для каждого значения тока катода подбиралось соответствующее напряжение u_0 на отражателе.

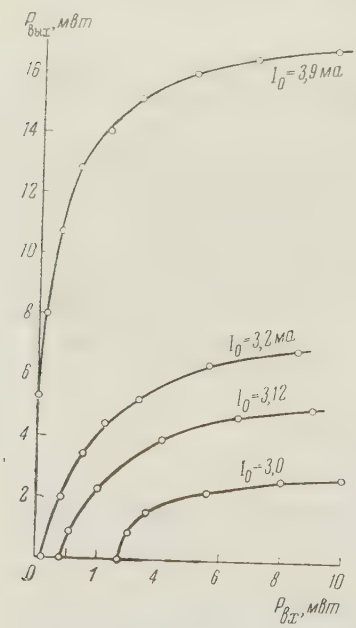


Рис. 2

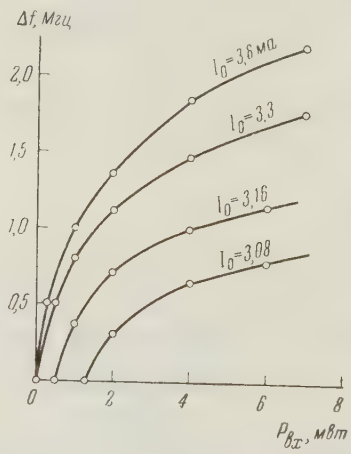


Рис. 3

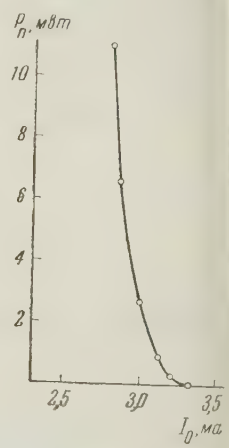
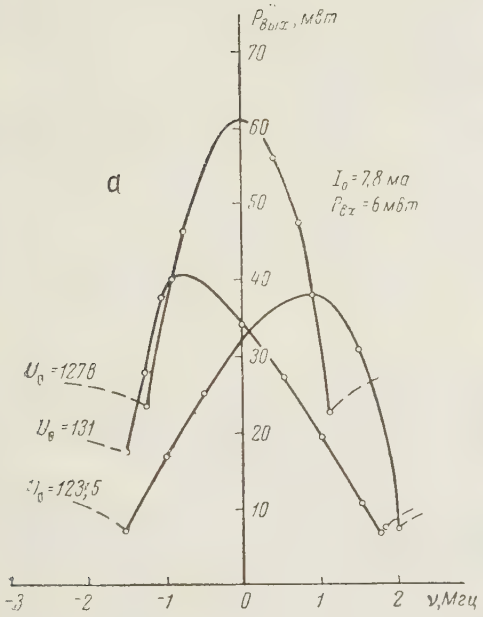


Рис. 4

Рис. 4 представляет зависимость пороговой мощности $P_п$ при резонансе второго рода от тока катода при оптимальном угле пролета электронов в пространстве отражателя.

На рис. 5 и 6 представлены зависимости амплитуды синхронизации на втором обертоне и резонанса второго рода от расстройки $\nu = f_{вн} - f_0$, где f_0 — частота автоколебаний клистрона-делителя частоты. Кривые даны для значений угла пролета электронов в пространстве отражателя. Кривые рис. 5,*а* и 6,*а* сняты по точкам, кривые рис. 5,*б*,*в*,*г* и 6,*б*,*в*,*г* — осциллограммы. Рис. 5,*б* и 6,*б* соответствуют углу пролета больше оптимального, рис. 5,*в* и 6,*в* — оптимальному, рис. 5,*г* и 6,*г* —углу пролета


$P_{вых}$, мвт
70
60
50
40
30
20
10
а
I_0 = 7,8 ма
$P_{вх}$ = 6 мвт
U_0 = 1278
U_0 = 131
U_0 = 123,5
-3
-2
-1
0
1
2
ν, Мгц

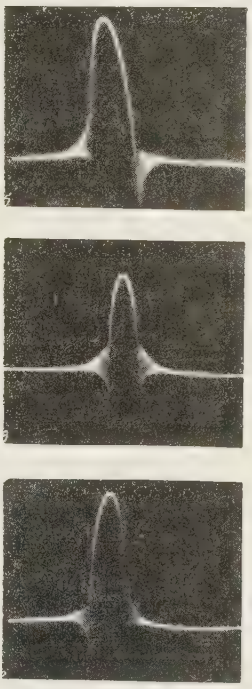
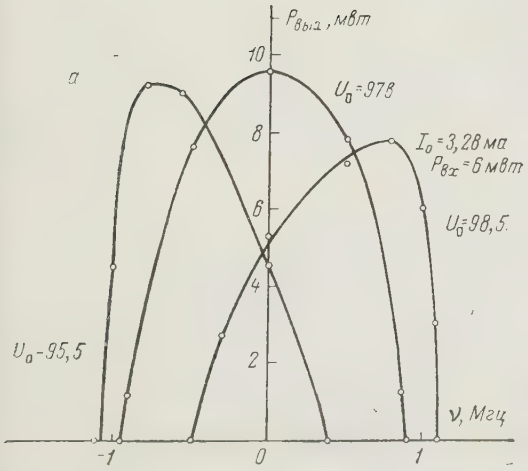


Рис. 5


$P_{выд}$, мвт
10
8
6
4
2
а
U_0 = 97,8
I_0 = 3,28 ма
$P_{вх}$ = 6 мвт
U_0 = 98,5
U_0 = 95,5
ν, Мгц
-1
0
1

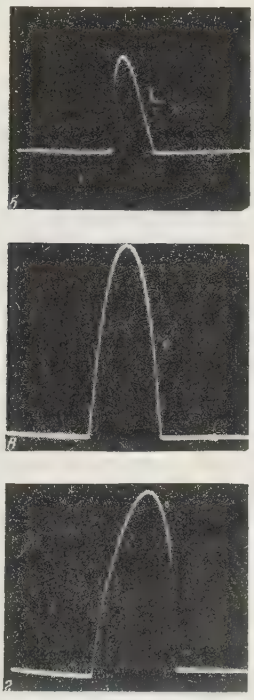


Рис. 6

меньше оптимального. Исследованные режимы не являются критическими в отношении питающих напряжений.

Полученные экспериментальные результаты, качественно совпадающие с теоретическими, приведенными в работах [2, 3, 4], указывают на возможность создания надежного прибора для деления частоты в диапазоне СВЧ.

В заключение приношу благодарность М. Е. Жаботинскому за исключительное внимание и повседневную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, Полн. собр. трудов, II, стр. 13, Изд. АН СССР, 1947.
2. Е. Н. Базаров, М. Е. Жаботинский, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 5, 680.
3. Е. Н. Базаров, М. Е. Жаботинский, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 2, 253.
4. С. А. Корнилов, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 4, 522.

Поступила в редакцию
24 XI 1959

ФУНКЦИИ ОСЛАБЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ДИПОЛЯ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

Г. Н. Крылов, Г. И. Макаров

В настоящем сообщении будет рассмотрен вопрос о получении приближенных выражений для вычисления компонент электромагнитного поля вертикального диполя, расположенного в произвольной точке пространства, а также вертикальной антенны с направленным вдоль поверхности земли излучением [1].

В известных нам исследованиях, посвященных данному вопросу [2], предварительно была получена функция ослабления для вектора Герца вертикального диполя. При этом были сделаны предположения, которые эквивалентны тому, что электрические свойства земли допускают решение указанной задачи с использованием граничных условий Леонтовича и что расстояние от диполя до точки наблюдения значительно больше высоты диполя и точки наблюдения. В последующем было выполнено интегрирование первого члена асимптотического разложения приближенного вектора Герца по высоте антенны, при условии, что ток в антенне распределен по синусоидальному закону. Наконец, после применения операций дифференцирования были получены компоненты электромагнитного поля вертикального диполя и вертикальная компонента электрического поля антенны. Основным недостатком указанной работы является отсутствие возможности оценить погрешности, которые были допущены при получении приближенных выражений, даже в случае диполя.

В настоящем сообщении будут предварительно получены точные представления для вычисления компонент электромагнитного поля вертикального диполя и вертикальной антенны, а затем приближенным методом будут вычислены интегралы, входящие в эти представления. Полученные окончательные выражения можно рассматривать как функции ослабления для компонент электромагнитного поля диполя и антенны, причем они справедливы при меньших ограничениях, чем в [2], и будут совпадать с приведенными там функциями ослабления, если пренебречь некоторыми членами, сделав дополнительные предположения. В сообщении исследован вопрос об оценке точности вычисления и пределах применимости полученных приближенных выражений.

Будем считать, что вертикальный электрический диполь находится при $\rho = 0$, $z = h$, а точка наблюдения — при $\rho = \rho$, $z = z'$ цилиндрической системы координат. В качестве исходного выражения для исследования возьмем строгое решение граничной задачи Зоммерфельда, которое после некоторых преобразований может быть записано в виде [3]

$$\pi_z = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} - \frac{e^{ikR}}{R} + aI_1 - bI_2, \tag{1}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0(\lambda\rho)\, e^{-nz}}{n - ika_1}\, \lambda d\lambda, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0(\lambda\rho)\, e^{-mz}}{m - ik_3a_2}\, \lambda d\lambda,$$

где

$$R^2 = \rho^2 + (z' + h)^2; \qquad n^2 = \lambda^2 - k^2; \qquad a = 1/(1 - \tau^4); \qquad b = \tau^2 a; \qquad \tau = k/k_3;$$

$$R_1^2 = \rho^2 + (z' - h)^2; \qquad m^2 = \lambda^2 - k_3^2; \qquad a_2 = 1/\sqrt{1 + \tau^2}; \qquad a_1 = \tau a_2; \qquad z = z' + h.$$

При решении задачи о вертикальной антенне будем считать, что антенна расположена при $\rho = 0$ от h_1 до h_2 и что ток в ней распределен по синусоидальному закону $j = kj_0 \sin\varphi$; $\varphi = kh + \varphi_0$ (φ_0 — некоторая фазовая постоянная).

Для получения компонент электромагнитного поля диполя и антенны прежде всего нужно деформировать исходный контур интегрирования в формуле (1) таким образом, чтобы оба конца его уходили на $+i\infty$, но на разных листах римановой поверхности переменного λ. При такой деформации исходного контура интеграл будет сходиться абсолютно при $\rho > 0$ для любого z и, следовательно, возможно при получении вектора Герца для вертикальной антенны выполнить интегрирования по h вектора Герца вертикального диполя под знаком интеграла по λ. Затем, при переходе к компонентам электромагнитного поля, можно выполнить дифференцирование по z' под знаком интеграла по λ, откуда компоненты электромагнитного поля диполя могут быть получены в виде

$$\varepsilon_z = \omega\mu \left\{(1 + D_z)\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + a(1 + \tau^4) D_z^2 - 2ia_1 D_z - 1 / a]\frac{e^{ikR}}{R} + aa_2^2 I_1 + W_1\right\}, \quad (2)$$

$$H_\varphi = i\left\{D_\rho\left[\frac{e^{ikR_1}}{R_1} - \frac{e^{ikR}}{R}\right] + aD_\rho I_1 + W_2\right\}, \qquad D_z = \frac{1}{k}\frac{d}{dz'}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_\rho = \omega\mu \left\{D_{z\rho}^2\left[\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + a(1 + \tau^4)\frac{e^{ikR_1}}{R}\right] - iaa_1 D_\rho I_1 + W_3\right\}, \qquad D_\rho = \frac{1}{k}\frac{d}{d\rho}. \quad (4)$$

Аналогичные выражения получаются и для компонент электромагнитного поля антенны:

$$\varepsilon_z^a = \omega\mu j_0 (\psi_1 - a_2^2 A I_1 + W_4)\Big|_{h_1}^{h_2}, \qquad A = (\cos\varphi + ia_1 \sin\varphi) / (1 - \tau^2),$$

$$\psi_1 = -(\cos\varphi + \sin\varphi D_z)\left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} - \frac{e^{ikR}}{R}\right) + 2a\tau^4 \sin\varphi D_z \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (5)$$

$$H_\varphi^a = ij_0(\psi_2 - AD_\rho I_1 + W_5)\Big|_{h_1}^{h_2}, \qquad B = (\sin\varphi - ia_1\cos\varphi) / (1 - \tau^2),$$

$$\psi_2 = -i(\cos\varphi + \sin\varphi D_z)\left(\frac{e^{ikR_1} - e^{ikR}}{\rho}\right) - 2i\sin\varphi D_z \frac{e^{ikR}}{\rho} + 2i(B + AD_z) D_z \frac{e^{ikR}}{\rho}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_\rho^a = \omega\mu j_0 (\psi_3 + ia_1 AD_\rho I_1 + W_6)\Big|_{h_1}^{h_2}, \qquad \psi_3 = D_z\psi_2 - 2AD_{z\rho}^2 \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (7)$$

Величины W_i, входящие в формулы (2) — (7), при этом равны:

$$W_1 = -b(1 + D_z^2) I_2, \qquad W_4 = b(\cos\varphi - \sin\varphi D_z) I_2,$$

$$W_2 = -bD_\rho I_2, \qquad W_5 = b(\cos\varphi - \sin\varphi D_z) I_3,$$

$$W_3 = -bD_{z\rho}^2 I_2, \quad I_3 = k^2 D_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0(\lambda\rho)\, e^{-nz}}{\lambda^2 (m - ik_3 a_2)} \lambda d\lambda, \quad W_6 = b(\cos\varphi - \sin\varphi D_z) D_z I_3. \quad (8)$$

Для получения окончательных выражений произведем оценку интегралов W_i, которые оказываются малыми почти для всех параметров земли, а интегралы I_1 и $D_\rho I_1$ вычислим приближенно через интеграл вероятности.

Если обратиться к представлению вектора Герца вертикального диполя в виде формулы (1), то можно показать, что интеграл I_2 описывает волну, распространяющуюся над поверхностью земли, в то же время интеграл I_2 описывает волну, проходящую сквозь толщу земли, и, вследствие большого затухания в земле, он мал. Для его оценки достаточно использовать первые члены его асимптотического разложения при интегрировании по разрезам $\lambda = k$ и $\lambda = k_3$, которые равны:

$$I_2 \sim \frac{\tau D_z}{2i}\frac{e^{ikR}}{R} + \frac{\tau e^{-k_3 z} D_z}{i}\frac{e^{ik_3 R}}{R}; \qquad I_3 \sim \frac{\tau D_z}{2i}\frac{e^{ikR}}{\rho} + \frac{\tau^3 e^{-k_3 z} D_{z\rho}^2}{i}\frac{e^{ik_3 R}}{R}. \quad (9)$$

Если теперь перейти к интегралам W_i, используя выражение (8), то можно

показать, что любой из интегралов W_i есть величина порядка $|\tau^2 (kz+1)/kR^2| \times \left[\frac{|\tau|}{2} + \exp(-z \operatorname{Re} k_3 - R \operatorname{Im} k_3)\right]$, что и может быть использовано при оценке точности вычислений.

Для вычисления интегралов I_1 и $D_\rho I_1$ воспользуемся их другими интегральными представлениями, которые могут быть получены аналогично рассуждениям, приведенным в работе [4]:

$$I_1 = \frac{2e^{ikR}}{R} + 2ika_1 \int_0^{\infty ik^*} \frac{e^{ik(R'+a_1\lambda)}}{R'} d\lambda; \qquad R' = \sqrt{\rho^2 + (z+\lambda)^2}. \tag{10}$$

Применим для вычисления этих интегралов метод наибыстрейшего спуска. Очевидно, из точки $\lambda = 0$ можно провести контур интегрирования таким образом, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Im} k(R' + a_1\lambda) = 0$. При этом фазовая функция в окрестности точки, где вещественная часть показателя максимальна, может быть разложена в ряд по степеням λ, сходящийся абсолютно при $|\lambda| < R$,

$$R' = R + \frac{\lambda z}{R} + \frac{\lambda^2\rho^2}{2R^3} - \frac{\lambda^3\rho^2 z}{2R^5} + \ldots, \tag{11}$$

откуда получаем окончательный результат:

$$I_1 = 2e^{ikR} y(z, \rho)/R; \qquad D_\rho I_1 = y(z, \rho) D_\rho e^{ikR}/R, \tag{12}$$

где

$$y(z, \rho) = 1 + 2s_0 e^{-s^2} \int_s^{i\infty} e^{x^2} dx; \qquad s_0 = a_1 (1+i)(kR)^{3/2}/2k\rho; \qquad s = s_0 (1 + z/a_1 R).$$

Рассмотрим, наконец, вопрос о точности вычисления интегралов I_1 и $D_\rho I_1$ по формуле (12), например при $z = 0$. Уже при $\lambda = 3R\sqrt{i}/4$ подынтегральная функция в формуле (10) будет убывать не хуже, чем $\exp(-9k\rho/32)$, и, следовательно, достаточно считать, что $k\rho \geqslant 16$, чтобы существенная для интегрирования область лежала при $R > |\lambda|$, где справедливо разложение (11). С другой стороны, при $k\rho \geqslant 16$ разложение фазовой функции в основном определяется квадратичным членом, тогда как член с λ^4 по крайней мере в $^9/_{64}$ раза меньше квадратичного. Это обстоятельство позволит утверждать, что уже при $k\rho \geqslant 16$ асимптотическое разложение для I_1 и $D_\rho I_1$ справедливо с точностью до 1—2%. Аналогичные оценки получаются и при z, отличном от нуля, что и решает полностью вопрос о вычислении компонент электромагнитного поля диполя и антенны в пространстве.

В приложении приведены некоторые численные результаты, которые были получены с использованием электронной вычислительной техники.

Приложение

Была составлена программа, которая позволяла производить вычисление модуля и аргумента функции ослабления вертикальной составляющей электрического поля:

$$(\varepsilon_z) = \frac{1}{2}\left\{-1 + \frac{1+\tau^4}{1-\tau^4}\left[\frac{i}{kR} - \frac{1}{k^2R^2} + \frac{(z'+h)^2}{R^2}\left(-1 - \frac{3i}{kR} + \frac{3}{k^2R^2}\right)\right] - \right.$$

$$- \frac{2ia_1}{1-\tau^4}\left(i - \frac{1}{kR}\right)\frac{(z'+h)}{R} + \frac{R}{R_1}\left[1 + \frac{i}{kR_1} - \frac{1}{k^2R_1^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(z'-h)^2}{R_1^2}\left(-1 - \frac{3i}{kR_1} + \frac{3}{k^2R_1^2}\right)\right] e^{ik(R_1-R)}\right\} + \frac{a_2^2}{1-\tau^4} I_1';$$

горизонтальной составляющей электрического поля:

$$(\varepsilon_\rho) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1+\tau^4}{1-\tau^4}\left[-1 - \frac{3i}{kR} + \frac{3}{k^2R^2}\right]\frac{(z'+h)\rho}{R^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{R}{R_1}\left[-1 - \frac{3i}{kR_1} + \frac{3}{k^2R_1^2}\right]\frac{(z'-h)\rho}{R_1^2}\; e^{ik(R_1-R)}\right\} - u_1/(1-\tau^4);$$

$$u_1 = ia_1 I_1' (i - 1/kR)\rho/R;$$

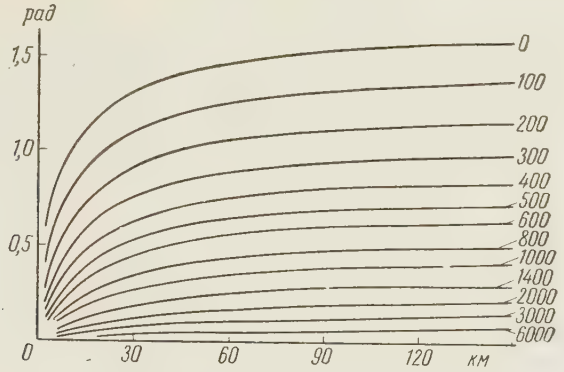


Рис. 1

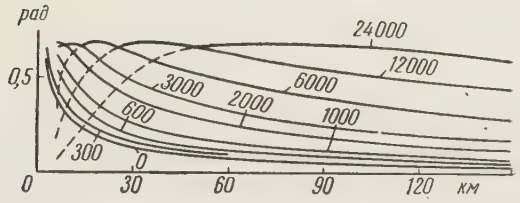


Рис. 2

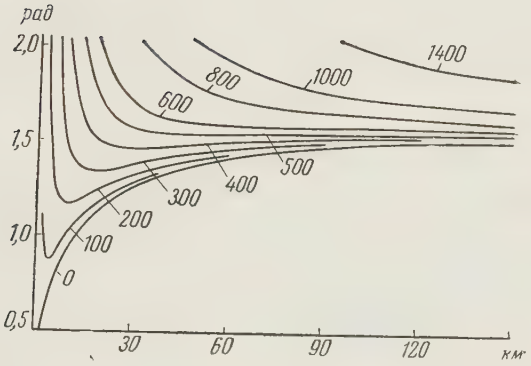


Рис. 3

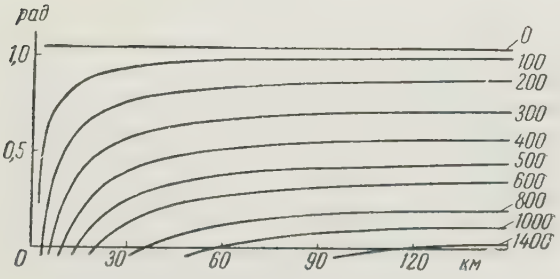


Рис. 4

горизонтальной составляющей магнитного поля:

$$(H_\varphi) = \frac{1}{2}\left\{\left[1+\frac{i}{kR}\right]\frac{\rho}{R} - \frac{R}{R_1}\left[1+\frac{i}{kR_1}\right]\frac{\rho}{R_1}\ e^{ik\,(R_1-R)}\right\} + \frac{u_1}{a_1(1-\tau^4)}.$$

Кроме того, производилось вычисление угла наклона эллипса поляризации электрического поля и модуля и аргумента максимума электрического поля:

$$\psi = 0{,}5 \operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}; \quad \varepsilon_{\text{макс}} = (\varepsilon_z)\cos\psi + (\varepsilon_\rho)\sin\psi; \quad B = |(\varepsilon_z)|^2 - |(\varepsilon_\rho)|^2;$$

$$A = 2\,[\mathrm{Re}\,(\varepsilon_z)\,\mathrm{Re}\,)\varepsilon_\rho) + \mathrm{Im}\,(\varepsilon_z\,(\mathrm{Im}(\varepsilon_\rho)].$$

Для вычисления I_1' было использовано прямое разложение в виде ряда, сходящегося при любых s, до $|s|^2 \leqslant 12$:

$$I_1' = 1 + 2s_0\left[\frac{i\sqrt{\pi}}{2}\ e^{-s^2} - s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2s^2)^n}{(2n+1)!!}\right].$$

При $|\rho|^2 > 12$ было использовано асимптотическое разложение:

$$I_1' = 1 - \frac{s_0}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2s^2)^n}.$$

На рис. 1 приведен график для дополнительной фазы вертикальной компоненты электрического поля при частоте 1 *Мгц* и параметров земли $\varepsilon = 9$, $\sigma = 5\cdot10^{-3}$ *мо/м*. На горизонтальной оси отложено расстояние вдоль поверхности земли в километрах, на вертикальной оси — фаза в радианах. Цифры над кривыми означают высоту подъема приемника в метрах.

На рис. 2, 3 и 4 для случая $\varepsilon = 9$, $\sigma = 5\cdot10^{-3}$ *мо/м* приведены графики модуля функции ослабления вертикальной компоненты электрического поля, дополнительной фазы горизонтальной компоненты электрического поля и угла наклона эллипса поляризации в зависимости от высоты.

Для всех приведенных на рисунках случаев модуль и аргумент максимума электрического поля отличаются от вертикальной составляющей электрического поля не более чем на 1—2%. Модуль и аргумент магнитного поля отличаются от модуля и аргумента максимума электрического поля тоже в пределах 1—2% (с точностью до постоянной разности фаз между векторами электрического и магнитного полей в π).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. E. Smith, Directional antennas, Cleveland, 1946.
2. K. A. Norton, Proc. I. R. E., 1936, 24, 10, 1367; 1937; 25, 9, 1203.
3. А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950.
4. Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.

Физический факультет
Ленинградского государственного университета
им. А. А. Жданова

Поступило в редакцию
18 V 1959

О ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВАХ ДВУМЕРНО- И ТРЕХМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ (ИСКУССТВЕННЫЕ ДИЭЛЕКТРИКИ)

Р. А. Силин

В электронных приборах СВЧ и антенной технике в последнее время находят широкое применение различные периодические структуры, в которых распространяются электромагнитные волны. Их называют либо замедляющими системами, либо искусственными диэлектриками. В ряде работ [1, 2, 3] описаны волноводные свойства таких структур и показано, что они могут иметь такие дисперсионные характеристики (т. е. зависимости частоты ω от волнового вектора β), которые не известны для твердого тела. В частности, они могут иметь отрицательную дисперсию, т. е. фазовая и групповая скорости волн в них могут быть направлены навстречу друг другу [4].

К настоящему времени исследованы лишь некоторые трехмерно-периодические структуры [2, 5] и несколько большее количество двумерно-периодических структур [1, 2, 3, 5, 6], так что еще трудно судить о том многообразии дисперсионных зависимостей, которые могут иметь искусственные диэлектрики.

На примерах двумерно- и трехмерно-периодических электрических систем, ячейки которых изображены на рис. 1, покажем, насколько разнообразными могут быть свойства искусственных диэлектриков. На этом рисунке через Z_1, Z_2, Z_3 и Z обозначены комплексные сопротивления двухполюсников, через I_1, I_2, I_3, I — комплексные амплитуды токов, через U_1, U_2, U_3 — комплексные амплитуды напряжений, а через φ_1, φ_2, φ_3 — разности фаз соответствующих напряжений и токов.

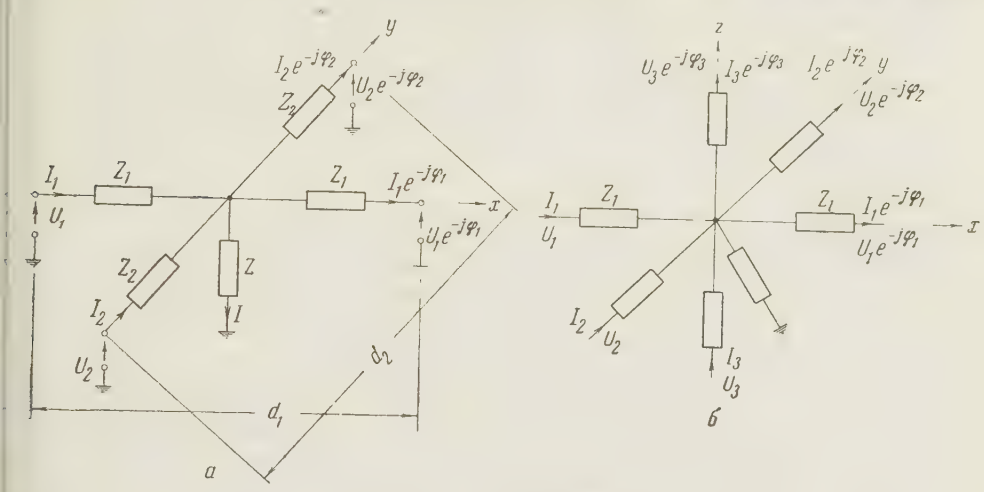


Рис. 1. Схемы ячеек:

а — двумерно-периодической; *б* — трехмерно-периодической электрических систем

Рассмотрим двумерно-периодическую цепочку. Для ее ячейки в соответствии с рис. 1.*а* составим уравнения Кирхгофа:

$$(1 - e^{-j\varphi_1})\, U_1 - Z_1 (1 + e^{-j\varphi_1})\, I_1 = 0,$$

$$(1 - e^{-j\varphi_2})\, U_2 - Z_2 (1 + e^{-j\varphi_2})\, I_2 = 0,$$

$$U_1 - Z_1 I_1 - ZI = 0$$

$$U_2 - Z_2 I_2 - ZI = 0,$$

$$(1 - e^{-j\varphi_1})\, I_1 - (1 - e^{-j\varphi_2})\, I_2 \quad I = 0.$$

Приравнивая нулю детерминант, составленный из коэффициентов этих уравнений, получаем уравнение дисперсии

$$\frac{1}{\zeta_1} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{\zeta_2} \sin^2 \frac{\varphi^2}{2} = -1, \tag{1}$$

где $\zeta_1 = Z_1 / 2Z$; $\zeta_2 = Z_2 / 2Z$ являются функциями частоты.

Аналогично получается уравнение дисперсии для трехмерно-периодической системы:

$$\frac{1}{\zeta_1} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{\zeta_2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} + \frac{1}{\zeta_3} \sin^2 \frac{\varphi_3}{2} = -1. \tag{2}$$

В случае $\zeta_1 > 0$ и $\zeta_2 > 0$ сдвиги фаз φ_1 и φ_2, определяемые уравнением (1), не могут быть действительными одновременно. Иными словами, если сопротивления либо все индуктивные, либо все емкостные, то в системе не могут распространяться «плоские» волны. В остальных случаях сдвиги фаз φ_1 и φ_2 могут быть действительными одновременно и, следовательно, в системе могут распространяться плоские волны.

На рис. 2 изображены линии постоянной частоты (изочастоты), т. е. линии $x = \omega^2 LC/2 = \text{const}$ в плоскости волновых векторов β. Компоненты β_1 и β_2 волновых векторов определяются соответственно равенствами

$$\beta_1 = \frac{\varphi_1}{d_1}, \quad \beta_2 = \frac{\varphi_2}{d_2},$$

где d_1 и d_2 — геометрические размеры ячейки (рис. 1, *а*). Построение изочастот сделано в предположении, что $d_1 = d_2$.

Волновой вектор β параллелен фазовой скорости $v_ф$ и связан с ней равенством

$$\beta = \frac{\omega}{v_ф^2} v_ф.$$

Групповая скорость, определяемая равенством $v_{гр} = \mathrm{grad}_\beta \omega$, направлена по нормали к изочастоте в сторону увеличения частоты.

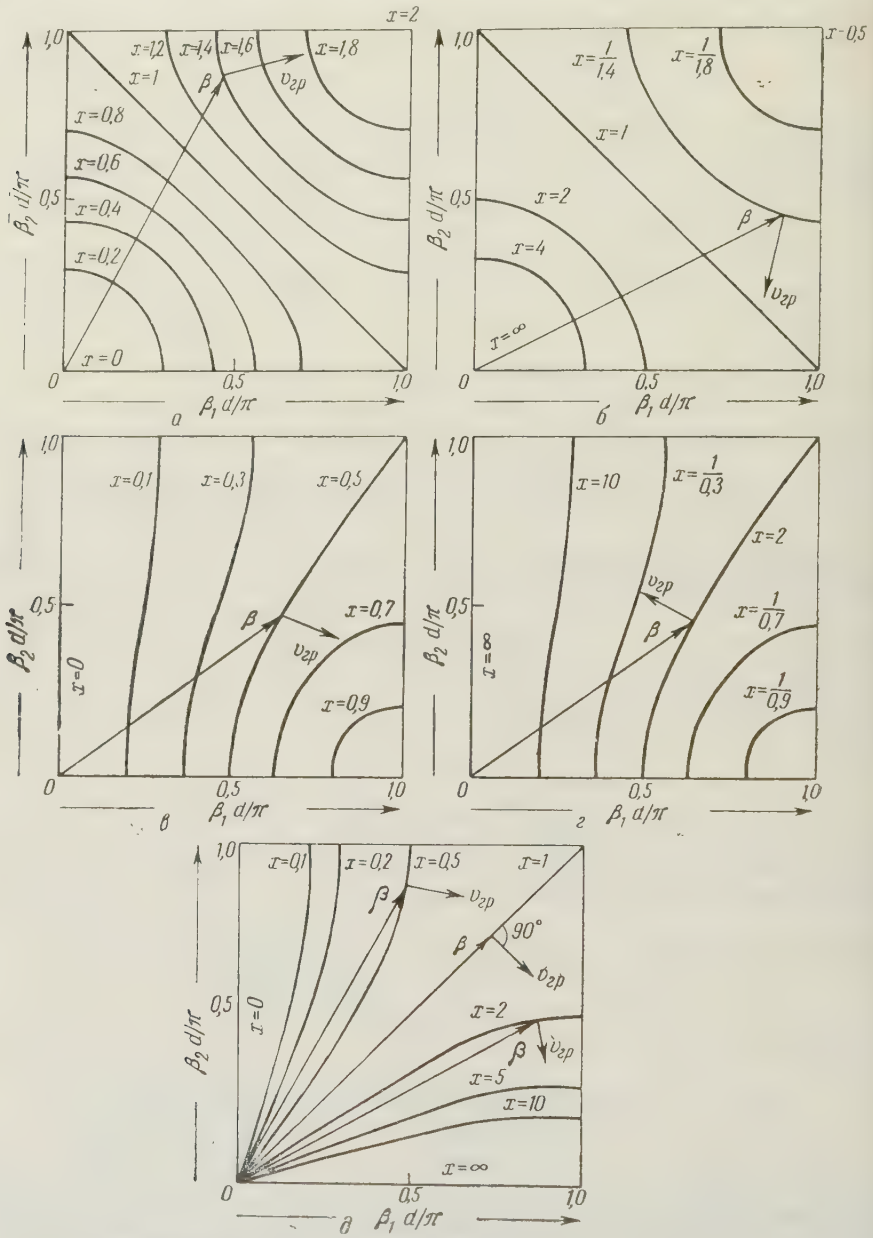


Рис. 2. Изочастоты двумерно-периодических электрических систем для:

$а$ — двумерно-периодической; $б$ — трехмерно-периодической электрических систем $а$ — $Z_1 = Z_2 = j\omega L$, $Z = 1/j\omega C$; $б$ — $Z_1 = Z_2 = 1/j\omega C$, $Z = j\omega L$; $в$ — $Z_1 = j\omega L$, $Z_2 = Z = 1/j\omega C$; $г$ — $Z_1 = 1/j\omega C$, $Z_2 = Z = j\omega L$; $д$ — $Z_1 = j\omega L$, $Z_2 = 1/j\omega C$, $Z_1 = \infty$

При $\zeta_1 < 0$ и $\zeta_2 < 0$ величины Z_1/j и Z_2/j имеют одинаковый знак, отличный от знака Z/j. Иными словами, если сопротивление Z — емкостное, то Z_1 и Z_2 — индуктивные, и наоборот. В соответствии с этим величины ζ_1 и ζ_2 либо одновременно увеличиваются с частотой, либо одновременно убывают.

Для малых значений модуля волнового вектора β изочастоты представляют собой ружности либо эллипсы (рис. 2, *а*, *б*), причем полуоси эллипсов растут или убывают частотой в соответствии с тем, растут или убывают с частотой ζ_1 и ζ_2. Если по-оси эллипсов растут с частотой, т. е. если сопротивления Z_1 и Z_2 — индуктивные, Z — емкостное, то угол между фазовой и групповой скоростями меньше $\pi/2$, что ответствует обычным представлениям оптики. Если полуоси эллипсов убывают частотой (Z_1 и Z_2 — емкостные, а Z — индуктивное), то этот угол больше $\pi/2$. частности, если изочастоты являются окружностями, то фазовая и групповая орости направлены навстречу друг другу (отрицательная дисперсия). Такого типа ления, насколько нам известно, в обычной кристаллооптике не наблюдались.

На рис. 2, *в*, *г*, *д* изображены изочастоты, которые еще более необычны с точки ения кристаллооптики. А именно, для $\zeta_1 > 0$ и $\zeta_2 < 0$ изочастоты при малых β ляются гиперболами, а при $Z = \infty$, $Z_1/j > 0$ и $Z_2/j < 0$ все изочастоты проходят рез начало координат.

Свойства трехмерно-периодических структур исследуются при помощи уравне-я (2). Сдвиги фаз φ_1, φ_2 и φ_3 могут быть действительными одновременно, если тя бы одна из величин ζ_m ($m = 1, 2, 3$) отрицательна. При этом возможны три учая: 1) все три величины ζ_m отрицательны; 2) две из трех величин ζ_m отрица-ельны; 3) одна из трех величин ζ_m отрицательна.

В соответствии с этими тремя случаями при малых β изочастоты являются бо эллипсоидами, либо однополостными гиперболоидами, либо двуполостными ги-ерболоидами. Возможен еще один случай ($Z = 0$), для которого изочастоты при лых β являются конусами.

В первых трех случаях, как и для двумерно-периодических структур, в зави-имости от того, как изменяются величины ζ_1, ζ_2 и ζ_3 с частотой, угол между фа-ой и групповой скоростями может быть как больше, так и меньше $\pi/2$. В послед-м случае для части изочастот одной и той же системы он меньше $\pi/2$, для части — ньше $\pi/2$, а для части он равен $\pi/2$.

На примере двух электрических схем мы показали, что искусственные диэлектрики гут иметь такие дисперсионные свойства и, следовательно, такие оптические свойства, торые неизвестны для обычных диэлектриков.

Электрическую систему с сосредоточенными параметрами можно считать частным чаем системы с распределенными параметрами. Поэтому среди систем с распреде-ными параметрами можно найти такие, которые обладают дисперсионными свой-ами, описанными выше. Некоторые из двумерно-периодических систем такого типа исаны в работах [1, 3, 6].

ЛИТЕРАТУРА

G. Mourier, Circuits à structure periodique à deux et trois dimensions L'Onde Electrique, 1958, **38**, 371, 95.

A. F. Harvey, Optical techniques at microwave frequencies, Proc. I. E. E., 1959, **106B**, 2, 141.

Р. А. Силин, Волноводные свойства замедляющих систем, Вопросы радиоэлектроники, серия Электроника, 1959, 4, 3.

Л. И. Мандельштам, Полн. собр. трудов, V, Изд. АН СССР, 1950.

Р. А. Силин, Расчет многорядных штыревых замедляющих систем, сб. Электроника, 1958, 2, 3.

O. Doheler et d'autres, Noveaux types de lignes pour tubes hyperfréquences, L'Onde Electrique, 1956, 36, 356, 937.

Поступило в редакцию
23 IX 1959

К УЧЕТУ ЕМКОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ СТУПЕНЧАТЫХ ПЕРЕХОДОВ

А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич

При расчете ступенчатых переходов на СВЧ обычно не учитывается влияние костей, обусловленных дифракционными явлениями на стыках ступенек. Учет этих костей в исходных эквивалентных схемах затруднителен, ибо он значительно услож-ет математические преобразования. Между тем, имеется возможность скорректировать ину ступенек уже после основного расчета, проведенного без учета емкостных эф-ктов. Такая коррекция в большинстве случаев сводит расхождение между расчет-ми и экспериментальными частотными характеристиками к минимуму и удовлетво-ет потребностям практики.

Рассмотрим эквивалентную схему скачка волнового сопротивления (рис. 1) и по-жем, что при малых значениях нормированной проводимости емкости

$$B = b\rho_i$$

ее можно заменить схемой рис. 2, где l' — эквивалентный отрезок передающей линии. Надо заметить, что подобного рода попытка заменить емкость скачка соответствующим отрезком линии имеется у Кона [1], однако формулы для коррекции в указанной работе оказались достаточно громоздкими и неудобными для практического применения.

Ниже будем пользоваться нормированными величинами, а потому можно заменить скачки волновых сопротивлений эквивалентными идеальными трансформаторами с коэффициентом трансформации [2]

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

где α — перепад волновых сопротивлений:

$$\alpha = \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}.$$

Произведя указанную выше замену, приходим к выводу, что для эквивалентности двух схем достаточно приравнять две волновые матрицы передачи $[T]$, одна из которых

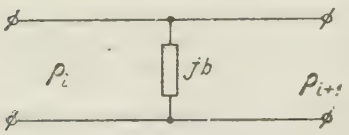


Рис. 1. Эквивалентная схема скачка волновых сопротивлений с учетом дифракционных явлений на стыке

соответствует параллельной проводимости $Y = jB$, а другая — отрезку передающей линии без потерь длиной l'. В соответствии с таблицей волновых матриц [2] получаем равенство

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{jB}{2} & j\frac{B}{2} \\ -j\frac{B}{2} & 1 - \frac{jB}{2} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} e^{j\theta'} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta'} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где $\theta' = 2\pi l'/\Lambda$, Λ — длина волны в передающей линии.

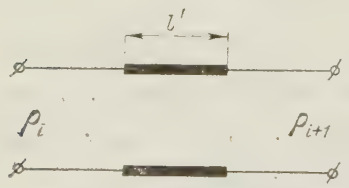


Рис. 2. К замене емкости скачка эквивалентным отрезком линии

Ввиду малости B ограничимся приравниванием элементов матриц T_{11}, считая $T_{12} = T_{21} \simeq 0$,

$$1 + \frac{jB}{2} = \sqrt{1 + \frac{B^2}{4}}\; e^{j \operatorname{arctg} \frac{B}{2}} \simeq 1 \cdot e^{j\frac{B}{2}} = e^{j\theta'},$$

откуда

$$l' = \frac{B}{2}\,\frac{\lambda}{2\pi}.$$

Для конкретности расчетов выберем $\Lambda = \Lambda_0 = 4l$, где l — длина нескорректированной ступеньки перехода. Очевидно, что и B надо вычислять на той же волне.

Ниже рассматривается пример коррекции длин ступенек, соединяющих прямоугольные волноводы одинаковой ширины и разной высоты, вдоль которых распространяется волна типа H_{10}.

На рис. 3 изображены одиночный скачок такого перехода и его эквивалентная схема. Требуемые значения B можно определять по графику [3, стр. 314]. Напомним, что в сочленениях описанного типа

$$\alpha = \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} = \frac{b_{i+1}}{b_i},$$

где b_i, b_{i+1} — высоты ступенек, $i = 0, 1, \ldots, n$. При этом $\alpha < 1$.

В заключение остановимся на границах применимости приближенного соотноше-
я (2). Ниже на примере показано, что при перепаде высоты волновода $b'/b < 2$
роводимость $B \leqslant 0{,}05$) теоретические и экспериментальные результаты коррекции
рошо совпадают. При этом имеем погрешность в модуле T_{11} (матрица (1)) порядка
3%, а элемент $T_{21} = 0{,}05$ вместо нуля. Эти численные границы погрешности до-
точны для большого числа практически встречающихся случаев проектирования
упенчатых переходов.

Пример. Дан эскиз (рис. 4) рассчитанного ранее чебышевского двухступен-
того перехода, соединяющего прямоугольные волноводы с сечениями 72×34 *мм* и 72×10 *мм*. На рис. 5 дается сопоставление его теоретической характеристики с экспериментальными характеристиками. Емкостные эффекты на стыках компенсировались соответствующим уменьшением длины ступенек.

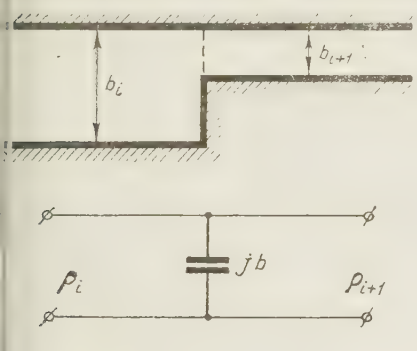


Рис. 3

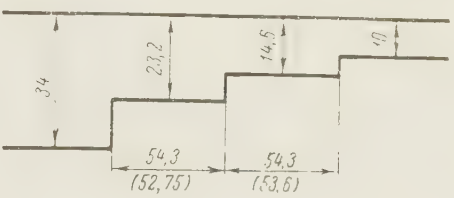


Рис. 4

ис. 3. К определению емкости скачка в прямоугольном волноводе
ис. 4. Эскиз чебышевского ступенчатого перехода. Цифры в скобках показывают длину ступенек с учетом коррекции

Порядок расчета. Находим вспомогательные расчетные параметры для ервой ступеньки справа (рис. 4):

$$\frac{2b_1}{\Lambda_0} = \frac{2 \cdot 14{,}6}{217} = 0{,}134,$$

е $\Lambda_0 = 4l = 4 \cdot 54{,}3 = 217{,}2$,

$$\frac{b_0}{b_1} = \frac{10}{14{,}6} = 0{,}686.$$

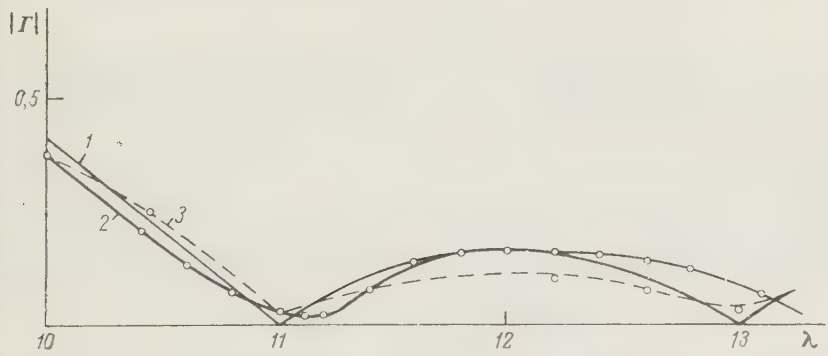


Рис. 5. Сопоставление расчетной и экспериментальных характеристик:

1 — расчетная; *2* — экспериментальная без учета коррекции длины ступенек; *3* — экспериментальная с учетом коррекции длины ступенек

По графику [3, стр. 314] находим

$$B \frac{\Lambda_0}{2b_1} = 0.3,$$

$$B = b\rho_1,$$

ткуда

$$B = 0{,}3 \frac{2b_1}{\Lambda_0} = \frac{0{,}3 \cdot 2 \cdot 14{,}6}{217} = 0{,}04.$$

Требуемое укорочение первой ступеньки (см. (2))

$$l_1' = \frac{B}{2} \frac{\Lambda_0}{2\pi} = \frac{0{,}04}{2} \frac{217}{2\pi} = 0{,}7 \text{ мм}.$$

Длина первой ступеньки после коррекции

$$l_1 = l - l_1' = 54{,}3 - 0{,}7 = 53{,}6 \text{ мм}.$$

Поступая аналогично предыдущему, получим

$$\frac{2b_2}{\Lambda_0} = \frac{2 \cdot 23{,}2}{217} = 0{,}214,$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{14{,}6}{23{,}2} = 0{,}63, \qquad B\,\frac{\Lambda_0}{2b_2} = 0{,}41 \text{ (по графику)},$$

где

$$B = b\hat{\rho}_2,$$

откуда

$$B = 0{,}41\,\frac{2b_2}{\Lambda_0} = 0{,}41\,\frac{2 \cdot 23{,}2}{217} \simeq 0{,}09;$$

$$l_2' = \frac{B}{2}\,\frac{\Lambda_0}{2\pi} = \frac{0{,}09}{2}\,\frac{217}{2\pi} = 1{,}55 \text{ мм}.$$

Длина второй ступеньки после коррекции

$$l_2 = l - l_2' = 54{,}3 - 1{,}55 = 52{,}75 \text{ мм}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. К о н, Оптимальная конструкция ступенчатого трансформатора из линий передачи, Вестн. информаций, Изд. Советское радио, 1955, 22, 6.
2. Л. Р. Я в и ч, Волновые матрицы четырехполюсника, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 7, 870.
3. Справочник по волноводам, Изд. Советское радио, 1952.

Поступило в редакцию
16 IV 1959

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОАКСИАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА, ОБА ПРОВОДНИКА КОТОРОГО НАГРУЖЕНЫ ДИСКАМИ

Н. М. Чиркин, Ю. Г. Стадник

В работах [1, 2] показано, что если коаксиальный волновод с дисками на обоих проводниках рассматривать как однородную бесконечно длинную структуру, в которой расстояние между дисками D значительно меньше длины волны в волноводе Λ, а его стенки обладают идеальной проводимостью, то распространение в нем простейшей медленной волны типа E_{01} можно описать системой двух уравнений

$$\frac{1}{\gamma}\,\frac{AI_1(\gamma a) - BK_1(\gamma a)}{AI_0(\gamma a) - BK_0(\gamma a)} = \frac{1}{k}\,\mathrm{ct}\,(kr_0,\ ka),$$

$$\frac{1}{\gamma}\,\frac{AI_1(\gamma e) - BK_1(\gamma e)}{AI_0(\gamma e) - BK_0(\gamma e)} = \frac{1}{k}\,\mathrm{ct}\,(kb,\ ke),$$

(1)

где

$$\mathrm{ct}\,(kr_0,\ ka) = \frac{N_0(kr_0)\,J_1(ka) - N_1(ka)\,J_0(kr_0)}{N_0(kr_0)\,J_0(ka) - N_0(ka)\,J_0(kr_0)};$$

$$\mathrm{ct}\,(kb,\ ke) = \frac{N_0(kb)\,J_1(ke) - N_1(ke)\,J_0(kb)}{N_0(kb)\,J_0(ke) - N_0(ke)\,J_0(kb)}$$

— малые радиальные котангенсы, описывающие частотную зависимость величины входных проводимостей ячеек на внутреннем и внешнем проводниках соответственно; a, b, e, r_0 (как это следует из рис. 1) — поперечные размеры рассматриваемого волновода; $\gamma = (\beta^2 - k^2)^{1/2}$, $\beta = 2\pi / \Lambda$ — соответственно радиальная и фазовая постоянные распространения; $k = 2\pi / \lambda$, λ — соответственно волновое число и длина волны возбуждающих колебаний. После некоторых преобразований систему уравнений (1)

можно свести к уравнению

$$\frac{I_1(\gamma a)}{K_1(\gamma a)}\,\frac{\dfrac{k}{\operatorname{ct}(kr_0,\ ka)}-\gamma\dfrac{I_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a)}}{\dfrac{k}{\operatorname{ct}(kr_0,\ ka)}+\gamma\dfrac{K_0(\gamma a)}{K_1(\gamma a)}}=\frac{I_1(\gamma e)}{K_1(\gamma e)}\,\frac{\dfrac{k}{\operatorname{ct}(kb,\ ke)}-\gamma\dfrac{I_0(\gamma e)}{I_1(\gamma e)}}{\dfrac{k}{\operatorname{ct}(kb,\ ke)}+\gamma\dfrac{K_0(\gamma e)}{K_1(\gamma e)}}. \tag{2}$$

Полученное уравнение, как и система уравнений (1), описывает зависимость постоянной распространения γ от k или, более точно, зависимость фазовой скорости электромагнитной волны v_Φ, распространяющейся в волноводе, от частоты возбуждающих колебаний.

Рассмотрим наиболее интересный с практической точки зрения случай, соответствующий

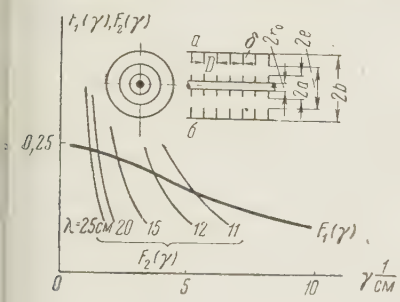


Рис. 1. Схема коаксиального нагруженного волновода и графический метод решения дисперсионного уравнения

распространению в волноводе волны с фазовой скоростью v_Φ, значительно меньшей скорости света c, когда можно допустить, что $\gamma a \gg 1$ и $\gamma e \gg 1$.

Учитывая, что при больших аргументах

$$\frac{I_0(x)}{I_1(x)}=\frac{K_0(x)}{K_1(x)}=1,\qquad \frac{I_1(x)}{K_1(x)}=\frac{1}{\pi}\,\frac{e^x}{e^{-x}},$$

где

$$e^x=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x;\qquad e^{-x}=\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x,$$

дисперсионное уравнение (2) можно свести к следующему уравнению:

$$\frac{\operatorname{th}\gamma(e-a)}{\gamma}=\frac{k\left[\operatorname{ct}(kb,\ ke)-\operatorname{ct}(kr_0,\ ka)\right]}{k^2-\gamma^2\operatorname{ct}(kr_0,\ ka)\operatorname{ct}(kb,\ ke)}. \tag{3}$$

Обозначим левую и правую части (3) через $F_1(\gamma)$ и $F_2(\gamma)$ соответственно. Определим, при каких условиях уравнение (3) имеет решение, для чего оценим пределы изменения его левой и правой частей.

Левая часть уравнения (3), являясь монотонной функцией аргумента γ, изменяется в пределах

$$0\leqslant\frac{\operatorname{tg}\gamma(e-a)}{\gamma}\leqslant e-a. \tag{4}$$

Действительно, используя правило Лопиталя, можно показать, что при $\gamma\to 0$

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{\operatorname{th}\gamma(e-a)}{\gamma}=e-a.$$

На рис. 1 представлены рассчитанные для выбранных размеров волновода (см. таблицу) графики функций $F_1(\gamma)$ и $F_2(\gamma)$. Точки пересечения этих кривых дают искомое значение γ на данной частоте $k=\omega/c$; по значениям γ можно построить дисперсионную кривую $c/v_\Phi=f(\lambda)$, так как $c/v_\Phi=\left(\dfrac{\gamma_2}{k^2}-1\right)^{1/2}$.

Неравенство (4) показывает, что уравнение (3) имеет решение при любом γ, если его правая часть изменяется при изменении k от 0 до ∞ в пределах, не меньших чем

$$0\leqslant F_2(\gamma)\leqslant e-a. \tag{5}$$

Поскольку в выражение для $F_2(\gamma)$ входят малые радиальные котангенсы, которые являются периодическими функциями от частоты ($k=\omega/c$), то следует ожидать, что и неравенство (5) с изменением γ от 0 до ∞ будет удовлетворяться периодически. Это означает, что в приближении, в котором справедливо уравнение (3), коаксиальный волновод с нагруженными проводниками является полосовым фильтром.

Определим, при каких условиях выполняется неравенство (5). Легко убедиться,

что

$$\lim_{\gamma\to 0} F_2(\gamma) = \frac{\operatorname{ct}(kb,\ ke) - \operatorname{ct}(kr_0,\ ka)}{k}, \qquad \lim_{\gamma\to\infty} F_2(\gamma) = 0. \tag{6}$$

Так как верхний предел неравенства (4) имеет место при $\gamma \to 0$, то согласно (6) уравнение (3) имеет решение при

$$\frac{\operatorname{ct}(kb,\ ke) - \operatorname{ct}(kr_0,\ ka)}{k} \geqslant e - a,$$

если входные проводимости ячеек на внутреннем и внешнем проводниках имеют разные знаки, и при

$$\frac{\operatorname{ct}(kb,\ ke) - \operatorname{ct}(kr_0,\ ka)}{k} \leqslant e - a,$$

если эти входные проводимости одинаковых знаков.

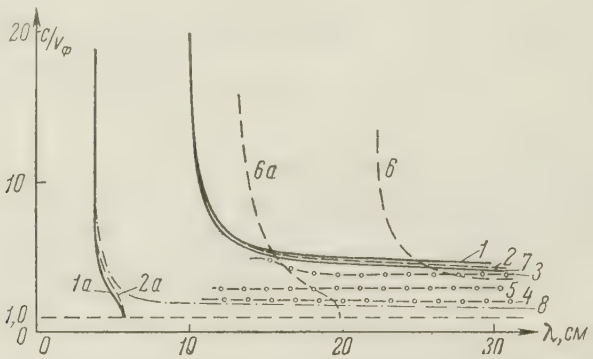


Рис. 2. Расчетные и экспериментальные дисперсионные кривые

Сравнение результатов расчета дисперсии рассматриваемого волновода, проведенного по уравнениям (2) и (3), с данными, полученными при его экспериментальном изучении, показывает, что каждое из указанных уравнений достаточно точно описывает дисперсию рассматриваемого волновода.

В таблице указаны для разных исследуемых случаев геометрические размеры волновода, способ определения его дисперсии, а также номер соответствующей дисперсионной кривой, семейство которых изображено на рис. 2.

Таблица

Кривая	a	b	e	r_0	Способ определения дисперсии
1 и *1*, *a*	2,0	3,25	2,25	0,35	уравнение (3)
2 и *2*, *a*	»	»	»	»	уравнение (2)
3	»	»	»	»	эксперимент
4	1,25	3,25	»	»	»
5	1,6	3,25	»	»	»
6 и *6*, *a*	3,0	10,6	4,0	0,65	уравнение (3)

Сравнение кривых *1*, *2* и *3* этого рисунка показывает, что уравнение (3) вполне пригодно для расчета дисперсии коаксиального волновода с нагруженными проводниками. Некоторое их несовпадение, вызванное как неточностями расчета (использование дисперсионных уравнений, не учитывающих толщину дисков и пр.), так и погрешностями эксперимента (неоднородность в периодичности структуры волновода, погрешности метода), не превосходит нескольких процентов.

Проведенный расчет показывает, что рассматриваемый волновод, как и коаксиальные волноводы, в которых нагруженным является только один проводник, представляет собой полосовой фильтр (на рис. 2 обозначены его первые две полосы пропускания), первая полоса которого ограничена только со стороны коротких волн.

Сравнение кривых *1*, *2*, *3* с кривой *7*, иллюстрирующей дисперсию коаксиального волновода с дисками на внутреннем проводнике (рассчитана по соответствующему уравнению, приведенному в работах [1, 2]), показывает, что при одинаковых высотах

ространства взаимодействия ($e - a$) и глубинах ячеек ($a - r_0$) рассматриваемый олновод и коаксиальный волновод с дисками на внутреннем проводнике обладают одиковыми дисперсионными свойствами.

Для сравнения на рис. 2 изображена кривая *8* — дисперсионная кривая коакального волновода (с дисками на внешнем проводнике), имеющего следующие геотрические размеры: $a = r_0 = 2$ *см*, $b = 3{,}25$ *см*, $e = 2{,}25$ *см*.

Из рис. 2 следует еще одна общность нагруженных коаксиальных волноводов. на состоит в том, что на значительном участке частотного диапазона их первых полос ропускания дисперсия этих волноводов слабо выражена («нулевая» дисперсия). Иная ртина имеет место в пределах других полос пропускания, где по своему виду исперсионная кривая напоминает соответствующие кривые секционированного волноода [3].

Сопоставляя кривые *8* и *2* (или *1*), можно убедиться в том, что замена в коаксиьном волноводе с диафрагмами гладкостенного внутреннего проводника стержнем, агруженным дисками, приводит не только к понижению фазовой скорости волны, но к увеличению числа полос пропускания, к их сужению. Так, например, в частотом диапазоне, охватывающем первую полосу пропускания коаксиального волновода диафрагмами, «размещаются» две первые полосы пропускания волновода с нагружеными проводниками. Анализ этих кривых также показывает, что коротковолновые сечки полос пропускания нечетных и четных номеров волновода с нагруженными оводниками (дисками нагружены оба проводника) определяются резонансом внутенних и внешних ячеек соответственно. Так, в случае первых двух полос пропускания и определяются первыми четвертьволновыми резонансами указанных ячеек.

Длины волн, соответствующие низкочастотным отсечкам полос пропускания олновода с нагруженными проводниками, с приемлемой для практики точностью, огут быть оценены по формуле

$$\lambda_n \simeq \frac{2(b - r_0)}{n - \frac{1}{4}},$$

де $n = 1, 2, 3, \ldots$ — порядковый номер рассматриваемой полосы пропускания.

Приведенная формула согласуется как с результатами расчета (рис. 2), так и тем фактом, что 1-я полоса пропускания указанного волновода практически не ограничена со стороны длинных волн, так как $\lambda_1 = \infty$ [1, 2, 3].

Из формулы для λ_n также следует, что низкочастотная предельная длина олны 2-й полосы пропускания равна критической длине волны E_{01} в коакиальном регулярном волноводе. Последнее позволяет утверждать, что на частоах, соответствующих 2-й и последующим полосам пропускания, противофазная одифицированная волна *TEM* типа, которая существует в пределах 1-й полосы ропускания и характеризуется $\lambda_1 = \infty$, преобразуется в синфазную волну электриеского типа. Под противофазной волной, как и в работах [4—6], понимается волна, ксиальная компонента электрического поля которой в пределах пространства взаимодействия ($e \geqslant r \geqslant a$) при изменении координаты r меняет свой знак. Аксиальная оставляющая электрического поля синфазной волны при любом значении r ($e \geqslant r \geqslant a$) охраняет свой знак. Модификация волны *TEM* типа в данном случае состоит в том, то она, помимо поперечной компоненты электрического поля, имеет и продольную, оторая своим происхождением обязана преобразованию регулярного коаксиального олновода в периодически нагруженную структуру. С увеличением длины волны озбуждающих колебаний λ, по мере ее приближения к предельной λ_1, модифицированная волна *TEM* типа становится все «чище», за счет уменьшения интенсивности скусственно полученной продольной составляющей электрического поля E_z, а при $\lambda \to \infty$ она превращается в поперечную волну, бегущую со скоростью света вдоль егулярного идеально проводящего коаксиального волновода. На подобное преобразование волны *TEM* типа, распространяющейся вдоль ребристого стержня, указано [7].

Отмеченный факт уменьшения интенсивности продольной компоненты E_z, в слуае применения рассматриваемого волновода в электронных приборах с непрерывным заимодействием, приводит на частотах, соответствующих 1-й полосе пропускания, ухудшению и без того неоптимального (из-за наличия поперечной составляющей лектрического поля) взаимодействия электронного потока с полем медленно бегущей волны.

В отдельных случаях 1-я и 2-я полосы пропускания рассматриваемого волновода огут частично перекрываться, «расширяя» тем самым 1-ю полосу.

Таким образом, при определенных размерах на некотором частотном диапазоне лин волн в рассматриваемом волноводе возможно одновременное существование ротивофазной и синфазной волн, структура суммарного поля которых довольно ложна. Необходимо обратить внимание на то, что указанное «расширение» 1-й полосы ропускания сопровождается ухудшением замедляющих свойств коаксиального волновода с двумя рядами диафрагм.

Вышесказанное полностью применимо ко всем другим двухпроводным резонаторым замедляющим системам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г Мириманов, Г. И. Жилейко, Об одном новом типе диафрагм рованного волновода, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 10, 137
2. Р. Г. Мириманов, Г. И. Жилейко, Анализ некоторых типов диафра мированных волноводов, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 2, 17
3. Н. М. Чиркин, О дисперсионных свойствах нагруженных коаксиальны волноводов, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1958, **1**, 4, 430.
4. Лампа с бегущей волной, перев. с англ. под ред. В. Т. Овчарова, Изд. Советско радио, 1952.
5. Н. В. Трунова, К теории синфазных волн в прямоугольном волноводе с п риодической гребенчатой структурой, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника 1958, **1**, 1, 105.
6. М. Ф. Стельмах, К теории сдвоенного блока щелевых резонаторов, Радио техника, 1958, **13**, 8, 30.
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957

Поступило в редакцию
18 IX 1958

О ВЛИЯНИИ ВНЕШНИХ ЦЕПЕЙ НА РАБОТУ ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВОГО ГЕНЕРАТОРА

В. Н. Шевчик, Г. Н. Шведов

Как уже сообщалось ранее [1, 2, 3], отражательный клистрон в отсутствие коле бательного контура генерирует колебания, перестраиваемые в широком диапазон частот при помощи изменения напряжения. Широкий диапазон электронной настройки (порядка 2 : 1), малая мощность колебаний (порядка одного милливатта) и отсутстви внешней колебательной системы позво лили сделать предположение о существо вании в описываемом генераторе внут реннего электронно-волнового механиз ма колебаний, связанного с колебатель ными свойствами электронного потока в силу чего генератор был назван элек тронно-волновым. Дальнейшее экспери ментальное исследование электронно волнового генератора позволило изу чить влияние внешних цепей на работу генератора, в частности на генериру емую им мощность, затягивание частоты, а также выяснить вопрос об уровне собственных шумов. Целью настоящего сообщения является краткое изложе ние наиболее интересных новых ре зультатов.

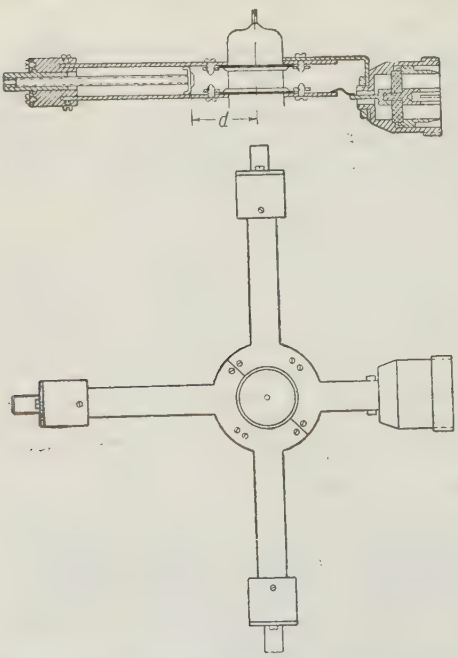


Рис. 1. Общий вид подстраивающих элементов и вывода энергии электронно-волнового генератора

При исследовании влияния внеш них цепей на работу электронно-вол нового генератора к емкости зазора клистрона подключались индуктивности различной величины. Эксперимент показал, что в данном случае электронные колебания существуют также в широком диапазоне частот, подключение же колебательного контура, образо ванного емкостью сеток и внешней индуктивностью, лишь увеличивает мощность в том или ином участке этого диапазона. Это подтверждает предположение авторов [1, 2, 3] о том, что генерируемая частота определяется исключительно условием целого числа длин волн вдоль замкнутого электронного потока. Пользуясь современной терминологией, развитой в работе [4], можно сказать, что замкнутый электронный поток в схеме тормозящего поля является своеобразным электронным резонатором, аналогом обычного

электромагнитного резонатора, состоящего из отрезка передающей линии. Внешние цепи являются нагрузкой и выводом энергии для электронного резонатора, отдаваемая мощность оказывается пропорциональной импедансу нагрузки. С подключением меньшей индуктивности резонанс внешнего контура и его максимальный импеданс приходятся на все более высокие частоты и в полном согласии с этим происходит перемещение максимума мощности в описываемом эксперименте. Следует отметить глубокую аналогию в этом отношении между исследуемым генератором и магнетронами, настраиваемыми напряжением [5, 6, 7, 8].

С целью более детального изучения влияния нагрузки, а также исследования практических возможностей генератора была изготовлена конструкция, показанная на рис. 1. Три отрезка ленточных линий с подвижными замыкающими плунжерами являются подстраивающими элементами, а коаксиальный вывод энергии нагружается на измеритель мощности. На рис. 2, 3 приведена зависимость мощности и частоты электронно-волнового генератора от управляющего напряжения, различные экспериментальные точки соответствуют разным значениям d — расстояния от оси клистрона до закорачивающих плунжеров. Пунктиром показана теоретическая частотная характеристика. Интересно, что независимо от положения подстраивающих элементов экспериментальные значения частоты ложатся на одну и ту же кривую, определяемую напряжениями на сетках V_g и на отражателе V_r. Подстраивающие элементы только увеличивают мощность в той или иной части генерируемого диапазона частот за счет повышения импеданса нагрузки.

Еще более убедительны результаты эксперимента, в котором напряжения на сетках и отражателе клистрона поддерживались постоянными, а настройка внешнего контура изменялась. Из рис. 4 видно, что частота определяется напряжениями и не зависит от настройки контура, а мощность колебаний зависит от внешней цепи.

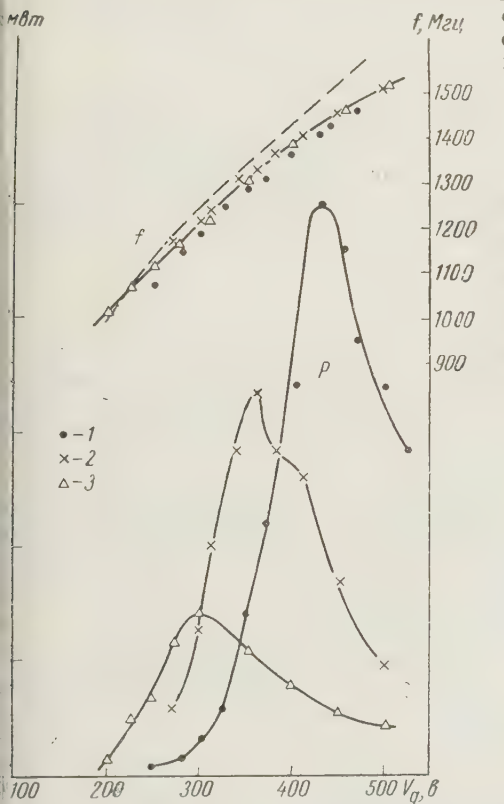


Рис. 2

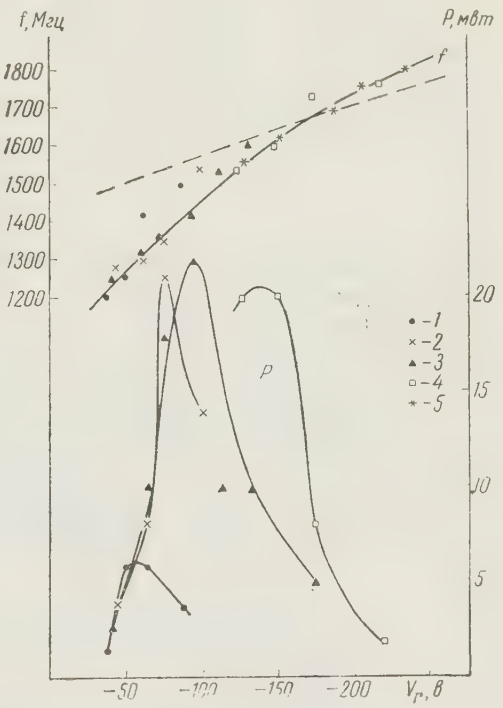


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость мощности P и частоты f электронно-волнового генератора на лампе типа A от напряжения на сетках V_g при $V_r = -10$ *в* (пунктиром дана теоретическая кривая):

1 — $d = 35$ *мм*; *2* — $d = 40$ *мм*; *3* — $d = 50$ *мм*

Рис. 3. Зависимость мощности P и частоты f электронно-волнового генератора на лампе типа $Б$ от напряжения на отражателе V_r при $V_g = 250$ *в* (пунктиром дана теоретическая кривая):

1 — $d = 48$ *мм*; *2* — $d = 43$ *мм*; *3* — $d = 38$ *мм*; *4* — $d = 33$ *мм*; *5* — $d = 28$ *мм*

Так как существенное возрастание импеданса возможно лишь вблизи резонанса внешней системы, то увеличение мощности может быть получено лишь за счет сужения полосы электронной перестройки. К аналогичным выводам приходят авторы [5—8].

Экспериментально исследовались генераторы, выполненные на основе стандартных отражательных клистронов двух типов, которые будем обозначать *А* и *Б*.

Генератор с лампами первого типа (*А*) настраивается напряжением на сетках и позволяет получить электронную перестройку от 40% при мощности 1—7 *мвт* до 14% при мощности 10—25 *мвт*. Центральная длина волны может быть выбрана в диапазоне 20—30 *см*. Наибольшая мощность получается на коротковолновом участке диапазона, где рабочий ток достигает 70 *ма*. При использовании лампы другого типа (*Б*) электронно-волновой генератор хорошо настраивается потенциалом отражателя и позволяет получить электронную перестройку порядка 25% при мощности 5—10 *мвт* около центральной длины волны в диапазоне 16—25 *см*.

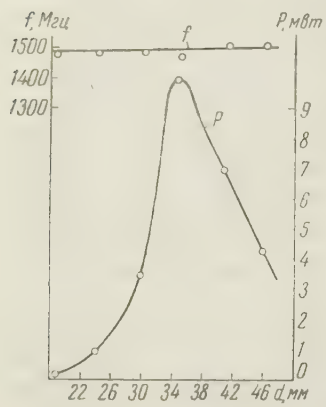


Рис. 4. Влияние внешней цепи на частоту f и мощность P электронно-волнового генератора на лампе типа *Б*. $V_g = 250$ *в*, $V_r = -90$ *в*

Измерения затягивания частоты показали, что у электронно-волнового генератора типа *Б* оно не превышает $\pm 0{,}2$ *Мгц* в диапазоне 1300—1600 *Мгц* при КСВ = 1,5—2. С лампами типа *А* затягивание частоты составляет $\pm 0{,}6$ *Мгц* на частотах 1200—1450 *Мгц* при КСВ = 1,5.

Для оценки собственных шумов электронно-волнового генератора производились измерения коэффициента собственного шума приемника, в котором в качестве гетеродина в одном случае употреблялся обычный отражательный клистрон с резонатором, а в другом случае — электронно-волновой генератор. Измерения производились на частоте 1400 *Мгц*. Коэффициент шума приемника с отражательным клистроном в качестве гетеродина составлял 66 единиц. При включении в качестве гетеродина электронно-волнового генератора коэффициент шума приемника повышался до 224 единиц с лампой типа *А* и до 400 единиц с лампой типа *Б*.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Шевчик, Докл. на конференции Радиосовета АН СССР, апрель, 1955.
2. В. Н. Шевчик, В. С. Стальмахов, Докл. на конференции Радиосовета АН СССР, май, 1957.
3. В. Н. Шевчик, Основы электроники сверхвысоких частот, Изд. Советское радио, 1959.
4. Z. S. Tchernov, Proceedings of the symposium on electronic waveguides, Polytechnic institute of Brooklyn, 1958, 339—344.
5. D. A. Wilbur, P. H. Peters, Proceedings of the symposium on modern advances in microwave techniques, Polytechnic institute of Brooklyn, 1954, 133—143.
6. D. A. Wilbur, P. H. Peters, Proc. Nat. Electronics Conf., 1955, **11**, 368—378.
7. J. A. Boyd, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 3, 332—338.
8. S. Jules Needle, IRE Trans. Electron Devices, 1954, **1**, 3, 18—28.

Поступило в редакцию
2 VII 1959

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИЗЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

М. Б. Цейтлин, Е. М. Ильина

При решении задачи о взаимодействии электронного потока с электромагнитной волной в ЛБВ в приближении заданного поля обычно считают, что амплитуда напряженности ВЧ-поля в линии меняется по экспоненциальному закону [1—6]. При этом получают неплохое соответствие с результатами строгой теории для случая асимптотического усиления. Однако в таком приближении нельзя исследовать поведение сигнала в начальном участке лампы, в частности определить параметр начальных потерь.

В настоящем сообщении сделана попытка дальнейшего обобщения метода заданного поля. При этом закон изменения амплитуды ВЧ-поля вдоль оси лампы не задается заранее, а определяется из уравнения баланса активной мощности. Решение этого

уравнения при соответствующих начальных условиях дает возможность найти распределение амплитуды поля вдоль оси лампы и, следовательно, вычислить усиление.

При этом, в отличие от результатов строгой теории [7], предполагается, что поле в линии может быть представлено одной волной с постоянной фазовой скоростью.

Предположим сначала, что линия не имеет потерь. Тогда уравнение баланса мощности в любой точке линии может быть записано в виде

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_0^z E(x)\,i^*(x)\,dx=\frac{E_1^2(z)}{2\beta^2K_c}-\frac{E_1^2(0)}{2\beta^2K_c}, \tag{1}$$

где $E_1(z)$ — амплитуда поля; K_c — сопротивление связи; β — фазовая постоянная волны в системе без пучка; $i(x)$ — конвекционный ток, возбуждаемый в пучке полем $E(x)$, который в режиме малых амплитуд определяется выражением [5]

$$i(x)=j\frac{I_0\beta_e}{2U_0}\int_0^x E(t)\,\frac{1}{\beta_q}\sin\beta_q(x-t)\,e^{-j\beta_e(x-t)}\,dx, \tag{2}$$

$$\beta_q=\frac{\omega_q}{v_0},$$

ω_q — частота плазменных колебаний в пучке; v_0 — скорость электронов.

Подставляя (2) в (1) и записывая напряженность поля в виде

$$E(z)=E_1(z)\,e^{-j\frac{\omega}{v_\Phi}z}=E_1(z)\,e^{-j\beta_e(1+bC)z},$$

где v_Φ — фазовая скорость волны в системе с пучком, получаем интегральное уравнение для амплитуды $E_1(z)$:

$$\frac{1}{\beta_q}\int_0^z E_1(x)\,dx\int_0^x E_1(t)\sin k(x-t)\sin\beta_q(x-t)\,dt=\frac{E_1^2(z)}{2m}-\frac{E_1^2(0)}{2m}, \tag{3}$$

$$k=\beta_e bC,\qquad m=\beta_e\beta^2C^3,\qquad C^3=\frac{K_cI_0}{4U_0}. \tag{4}$$

Последовательным дифференцированием уравнение (3) может быть приведено к дифференциальному уравнению 5-го порядка

$$\frac{d^5E_1}{dz^5}+2(\beta_q^2+k^2)\frac{d^3E_1}{dz^3}+[(\beta_q^2-k^2)^2-2km]\frac{dE_1}{dz}=0 \tag{5}$$

с начальными условиями

$$z=0,\quad E_1=E_1(0),\quad \frac{dE_1}{dz}=\frac{d^2E_1}{dz^2}=\frac{d^3E_1}{dz^3}=0,\quad \frac{d^4E_1}{dz^4}=2kmE_1(0). \tag{6}$$

Интегрирование этого уравнения даст

$$E_1(z)=E_1(0)\left\{1-\frac{2mk}{\mu^2\nu^2}+\frac{2mk}{\mu^2+\nu^2}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\mu z}{\mu^2}+\frac{\cos\nu z}{\nu^2}\right)\right\}, \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\mu&=\sqrt{\sqrt{2km+4k^2\beta_q^2}-(k+\beta_q^2)}=\beta_eC\sqrt{\sqrt{2\beta\gamma^2+4b^2q}-(q+b^2)},\\ \nu&=\sqrt{\sqrt{2km+4k^2\beta_q^2}+(k^2+\beta_q^2)}=\beta_eC\sqrt{\sqrt{2b\gamma^2+4b^2q}+(q+b^2)},\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$q=4QC=\frac{\beta_q^2}{\beta_e^2C^2},\qquad \gamma=\frac{\beta}{\beta_e}=\frac{v_0}{v_\Phi}=1+bC. \tag{9}$$

Предполагая, что $C\ll 1$, будем в дальнейшем считать $\gamma=1$. Рассмотрим асимптотическое усиление, считая z достаточно большим. В этом случае из (7) можно получить

$$\frac{E_1(z)}{E_1(0)}=\frac{mk}{\mu^2(\mu^2+\nu^2)}\,e^{\mu z}.$$

Таким образом, усиление (в децибелах) равно

$$G = 8{,}68\,\mu z + 20\lg\frac{mk}{\mu^2(\mu^2+\nu^2)}. \tag{10}$$

Рассмотрим случай пренебрежимо малого пространственного заряда, $q = 0$. Полагая $d\mu / db = 0$, найдем для режима максимального усиления

$$b_{\text{опт}} = \frac{1}{2}, \quad \mu_{\text{макс}} = \beta_e C\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{mk}{\mu^2(\mu^2+\nu^2)} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, вместо (10) получим

$$G = 47{,}3\,CN - 9{,}54, \tag{11}$$

где N — длина лампы, выраженная в длинах волн.

Из (7) получаем выражение для амплитуды напряженности поля в режиме максимального усиления:

$$\frac{E_1(z)}{E_1(0)} = \frac{2}{3}\operatorname{ch}(\sqrt{3}\pi CN) + \frac{2}{5}\cos(\sqrt{5}\pi CN) - \frac{1}{15}. \tag{12}$$

На рис. 1 дана зависимость усиления от CN, вычисленная по формуле (12). Для сравнения (пунктирной линией) показана та же зависимость, полученная из строгой теории [7].

В случае большого пространственного заряда ($q > 1$) из (8) находим

$$\left.\begin{aligned} b_{\text{опт}} &= \sqrt{q}, \\ \mu_{\text{макс}} &= \sqrt{2}\beta_e C\sqrt{\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}} - q}, \\ \frac{mk}{\mu^2(\mu^2+\nu^2)} &= \frac{\sqrt{q}}{8\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}}\left(\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}} - q\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Таким образом, в соответствии с формулой (10)

$$G = BCN + A = 77{,}2\sqrt{\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}} - q}\,CN + 20\lg\frac{\sqrt{q}}{8\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}}\left(\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}} - q\right)}. \tag{14}$$

Из (13) следует, что при $q \to \infty$ параметр начальных потерь A стремится к $20\lg\frac{1}{2} = -6{,}06$.

Заметим, что в [7] при расчете зависимости A от QC (рис. IX.4) допущена ошибка.

Подставляя $b_{\text{опт}} = \sqrt{q}$ в (7), получаем выражение для амплитуды поля в режиме максимального усиления для большого пространственного заряда:

$$\frac{E_1(z)}{E_1(0)} = \frac{\sqrt{q}}{4\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}}} \times \tag{15}$$

$$\times\left[\frac{\operatorname{ch}\left(2\sqrt{2}\pi CN\sqrt{\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}} - q}\right)}{\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}} - q} + \frac{\cos\left(2\sqrt{2}\pi CN\sqrt{\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}} + q}\right)}{\sqrt{q^2+\frac{1}{2}\sqrt{q}} + q}\right].$$

На рис. 2 представлена зависимость усиления от CN для различных значений параметра q.

Учтем теперь затухание линии. В этом случае уравнение баланса ВЧ-мощности любой точке линии может быть записано в виде

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^z E(x)\,i^*(x)\,dx=\frac{E_1^2(z)}{2\beta^2K_c}-\frac{E_1^2(0)}{2\beta^2K_c}+\int_0^z dP_n, \tag{16}$$

ще $\int_0^z dP_n$ — мощность потерь. Считая, что затухание в линии происходит по экспоненциальному закону, т. е. что $P(z)=P_0e^{-2\beta_e C\,dz}$, найдем изменение мощности

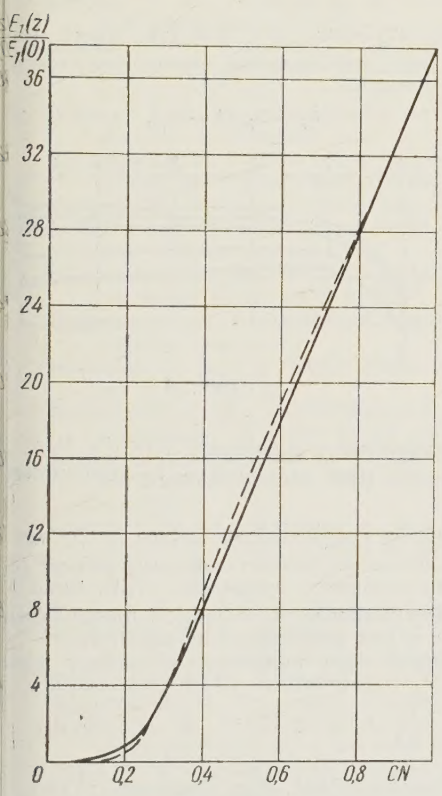


Рис. 1

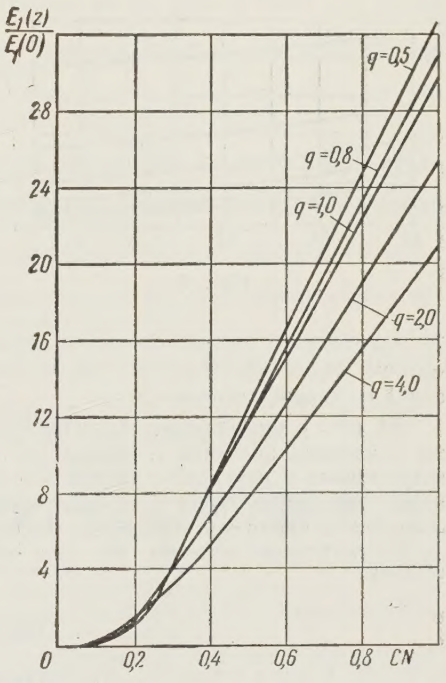


Рис. 2

вследствие затухания на участке dz:

$$dP=-dP_n=-2\beta_eC\,dP(z)\,dz=-2\beta_eC\,d\,\frac{E_1^2(z)}{2\beta^2K_c}\,dz. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), после соответствующих преобразований получаем интегральное уравнение для амплитуды поля: (18)

$$\frac{1}{\beta_q}\int_0^z E_1(x)\,dx\int_0^x E_1(t)\sin k(x-t)\sin\beta_q(x-t)\,dt=\frac{E_1^2(z)}{2m}-\frac{E_1^2(0)}{2m}+\frac{\beta_eC\,d}{m}\int_0^z E_1^2(x)\,dx. \tag{18}$$

Это уравнение может быть сведено к дифференциальному уравнению 5-го порядка

$$\frac{d^5E_1}{dz^5}+\beta_eC\,d\,\frac{d^4E_1}{dz^4}+2(k^2+\beta_q^2)\,\frac{d^3E_1}{dz^3}+2(k^2+\beta_q^2)\,\beta_eC\,d\,\frac{d^2E_1}{dz^2}+$$

$$+[(k^2-\beta_q^2)^2-2mk]\,\frac{dE_1}{dz}+(k^2-\beta_q^2)\,\beta_eC\,dE_1=0 \tag{19}$$

с начальными условиями

$$z=0, \quad E_1(z)=E_1(0), \quad \frac{dE_1}{dz}=-\beta_e C\, dE_1(0), \quad \frac{d^2E_1}{dz^2}=(\beta_e Cd)^2 E_1(0),$$

$$\frac{d^3E_1}{dz^3}=-(\beta_e Cd)^3 E_1(0), \quad \frac{d^4E_1}{dz^4}=2kmE_1(0).$$

Общий интеграл (19) равен $E_1(z)=\sum_{i=1}^{5} C_i e^{\lambda_i z}$, где λ_i — корни соответствующего характеристического уравнения. Для малого затухания ($d<0{,}4$) эти корни могут быть приближенно определены в предположении

$$\lambda_i=\lambda_{i0}(1-\delta_i), \qquad (20)$$

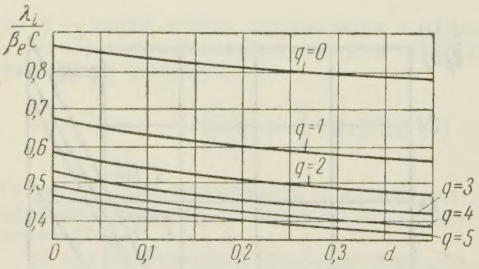


Рис. 3

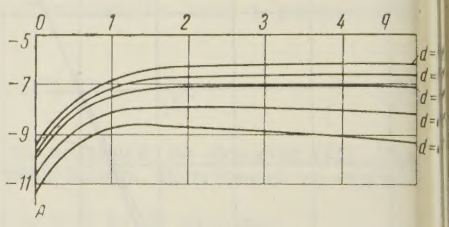


Рис. 4

где λ_{i0} — корни соответствующего характеристического уравнения для $d=0$, т. е. $\lambda_{10}=\mu$; $\lambda_{20}=-\mu$; $\lambda_{30}=j\nu$; $\lambda_{40}=-j\nu$; $\lambda_{50}=0$. При вычислении λ_i сохранялись члены со второй степенью δ_i.

На рис. 3 представлена зависимость параметра возрастающей волны $\lambda_i/\beta_e C$ от d для различных значений q. Кривые рис. 3 хорошо согласуются с данными работы [8], полученными в результате численного решения основного уравнения ЛБВ. Зная λ_i, можно определить $E_1(z)$ и, следовательно, найти параметр A. На рис. 4 представлена зависимость параметра начальных потерь A от q для различных значений d.

В заключение отметим, что этот метод может быть применен к анализу работы ЛОВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Коваленко, Введение в электронику СВЧ, Изд. Советское радио, 1955.
2. В. М. Лопухин, Вестн. Моск. ун-та, 1958, 4, 19.
3. В. Н. Шевчик, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 1, 104.
4. В. Н. Шевчик, Основы электроники СВЧ, Изд. Советское радио, 1959.
5. А. С. Победоносцев, А. С. Тагер, Сб. Электроника, 1958, 5, 15.
6. М. Б. Голант, Сб. Электроника, 1959, 2, 3.
7. Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, Изд. Советское радио, 1952.
8. G. R. Brewer, Ch. K. Birdsall, IRE Trans., 1957, ED-4, 2, 140.

Поступило в редакцию
18 V 1959

CONTENTS

Siforov V. I. Lenin and radioelectronics 1
Sragovich V. G. Evaluation of detecting characteristics assuming the quadratic summing of signals 531
Levin B. R. Optimal phase method of signal detection 537
Krasovskiy A. A., Zuikov V. N. Sensitivity threshold limit of thermal radiation 544
Cherniak Yu. B. Intercorrelation of the output noise voltages of amplifiers with over-lapping frequency characteristics 551
Luchina A. A. Quality analysis of the non-linear second-order differential equation of a rigid oscillatory system 562
Shusterovich A. N. On the approximate solution of an equation for the phase of an ossillator influenced by an external force 568
Karpeev G. A., Semenov A. A. On one method of the experimental investigation of fluctuations at VHF 578
Braude B. V., Esepkina N. A., Kaidanovsky N. L., Khaikin S. E. Investigation of the influence of accidental errors on the electrical characteristics of a ring-directional mirror antenna with a reflector of a variable shape . . 584
Mikazan P. S. Electromagnetic waves diffraction on the joint of helix and plane circular waveguides 597
Shestopalov V. P. Dispersion properties and space resonances in a helix waveguide placed in a magnetodielectric medium 605
Vakman D. E. Signal distortions in delay lines 621
Iavich L. R. Some relations for cascade connection of n of identical non-reversible four-terminal networks 633
Gurevich S. B., Bykov R. E. Apperture beam influence on the commutation of a potential relief in a vidicon 638
Rapoport G. N. Excitation of a waveguide by an electron beam with periodically varying trajectories 649
Hizhniak N. A. The energy losses of a charged disc moving at constant velocity in a waveguide 654
Reikhrudel E. M., Smirnitskaya G. V., Vasilieva M. N. Some characteristics of a discharge in a ion pump and a magnetic ion meter 662
Razin A. A., Tarasova L. V., Tsukerman V. A. Microfilming of the surface of electrodes in a prebreakdown phase and at an electric breakdown in a high vacuum 666
Kushnir Yu. M., Kabanov A. N., Krutiakova L. N. Measurement of the energy losses of 70 kev Li-ions in gases using an electrostatic analyzer 672

BRIEF REPORTS

Basov N. G., Karlov N. V. Wideband radiometer with a quantum spectra converter 676
Tychinskiy V. P., Fedorov V. G., Savilov P. I. Regenerative amplifier-converter on diodes with non-linear capacity 677
Tychinskiy V. P., Karpetskiy V. V. Investigation of one circuit parametric amplifier 679
Bazarov E. N. Frequency divider on a three-grid reflex klystron 681
Krylov G. N., Makarov G. I. The attenuations functions of the electromagnetic field produced by a vertical dipole and verticalantenna 684
Silin R. A. On dispersion properties of two-dimensional and three-dimensional periodic systems (artificial dielectrics) 688
Feldstein A. L., Iavich L. R. Consideration of the capacitance effects at the design of stepping transits 691
Chirkin N. M., Stadnik Yu. G. Some properties of a coaxial waveguide with disk-loaded conductors 694
Shevchik V. N., Shvedov G. N. On the influence of the external circuits upon an electron-wave oscillator 698
Tseitlin M. B., Ilyina E. M. On the problem of the analysis of the interaction of an electron stream with a travelling wave 700

Цена 13 руб. 75 коп.